

Nome, Cognome

Matricola

ANALISI MATEMATICA A & B

– PROVA SCRITTA –

20 FEBBRAIO 2023

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2022/2023

Libri, appunti e calcolatrici non ammessi

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.
- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.
- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. Si dica per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie seguente converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \quad \alpha > \frac{1}{2}$$

Esercizio 2. Trovare e classificare i punti critici della funzione $f(x, y) = xy + x^2y + y^2$

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right) \text{ punto di minimo locale} \quad (0, 0), (-1, 0) \text{ punti sella}$$

Esercizio 3. Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x}{x \tan x} = -\frac{1}{2}$$

Esercizio 4. Si dica quali tra le seguenti affermazioni risultano corrette per $x \rightarrow 0$

$$\boxed{e^x - 1 \sim x} \quad 1 - \cos x \sim x^2 \quad \boxed{x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = o(1)} \quad \boxed{1 - \cos x = o(x)} \quad \boxed{(1+x)^{\frac{1}{x}} \sim e}$$

Esercizio 5. Si trovi il potenziale U del campo vettoriale conservativo $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, z)$ tale che $U(0, 0, 1) = 1$

$$U(x, y, z) = xy + \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2}$$

Esercizio 6. Si calcoli l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x, y) = x^2y$ nel punto $(1, 2, f(1, 2))$

$$z = 4x + y - 4$$

Esercizio 7. Si calcoli la derivata di $f(x, y) = \log(x^2 + y)$ nel punto $(1, 1)$ lungo la direzione $\omega = (\sqrt{3}/2, 1/2)$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(1, 1) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}$$

Esercizio 8. Si trovi una primitiva F della funzione $f(x) = 2x^3 + 1$

$$F(x) = \frac{x^4}{2} + x$$

Esercizio 9. Si calcoli l'area del grafico di $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ definita sull'insieme $A = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$

$$\text{Area} = \sqrt{2}\pi$$

Esercizio 10. Si calcoli il baricentro dell'insieme $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ rispetto all'asse y

$$\mathbf{b}_E = \left(0, \frac{4}{3\pi}\right)$$

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

*In questa parte **non** verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti). Sia $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$, se ne calcoli il momento d'inerzia rispetto all'asse delle z .

Esercizio 12 (9 punti). Si consideri il potenziale

$$U(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Siano $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva definita da

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^2), \quad \text{per } t \in [0, 2\pi],$$

e $\Sigma, V \subseteq \mathbb{R}^3$ gli insiemi dati da

$$V = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\} \quad \text{e} \quad \Sigma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Si calcoli:

- (1) Il lavoro del campo generato da U lungo il sostegno di γ ;
- (2) il flusso del campo generato da U attraverso ∂V ;
- (3) il flusso del campo generato da U attraverso Σ .