Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA A+B
– PROVA SCRITTA DEL 20 GIUGNO 2022 –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2021/2022

`Libri, appunti e calcolatrici` **non ammessi**

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Si calcoli l'area del seguente insieme* $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z = 1,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$\text{Area} = \frac{\pi}{6}\left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$

Esercizio 2. *Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione* $f(x, y) = x^2\sqrt{y}$ *nel punto* $(1, 1, f(1, 1))$.

$$z = 2\,x + \frac{y}{2} - \frac{3}{2}$$

Esercizio 3. *Si trovi una primitiva* F *della funzione* $f(x) = e^x\,\cos x$

$$F(x) = e^x\,\frac{\cos x + \sin x}{2}$$

Esercizio 4. *Si calcoli il seguente limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x + x^2) - \log(1 + x)}{\sqrt{1 + x^2} - 1} = 3$$

Esercizio 5. *Si calcoli la curvatura* κ_γ *della curva cartesiana* $\gamma(t) = (t, e^t)$ *definita per* $t \in [0, 1]$

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{e^t}{(1 + e^{2\,t})^{\frac{3}{2}}}.$$

Esercizio 6. *Si dica quali tra i seguenti sono punti sella per la funzione* $f(x, y) = 2\,x\,y^2 - y^3 - x$

$$(0,1) \qquad \boxed{\left(\frac{3}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \qquad \left(\frac{3}{2}, 1\right) \qquad (1,-1) \qquad \left(-\frac{3}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Esercizio 7. *Si calcoli il lavoro del campo vettoriale* $\mathbf{F}(x, y) = (x\,y, x)$ *lungo il sostegno del circuito regolare* $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, *con* $t \in [0, 2\,\pi]$

$$L = \pi$$

Esercizio 8. *Si dica per quali valori del parametro* $\alpha \in \mathbb{R}$ *la seguente serie risulta convergente*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(n^{\alpha\,n}\,n!\,2^n\right) \qquad \textit{per } \alpha \leq -1$$

Esercizio 9. *Si dia lo sviluppo di Taylor, centrato in* $x_0 = 0$ *all'ordine* 3 *con resto di Peano, della funzione seguente*

$$\frac{1}{1 + x - x^3} = 1 - x + x^2 + o(x^3) \qquad \textit{per } x \to 0$$

Esercizio 10. *Si calcoli il momento d'inerzia di* $E = \{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq |x|\}$ *rispetto all'asse delle* y

$$M = \frac{\pi - 2}{16}$$

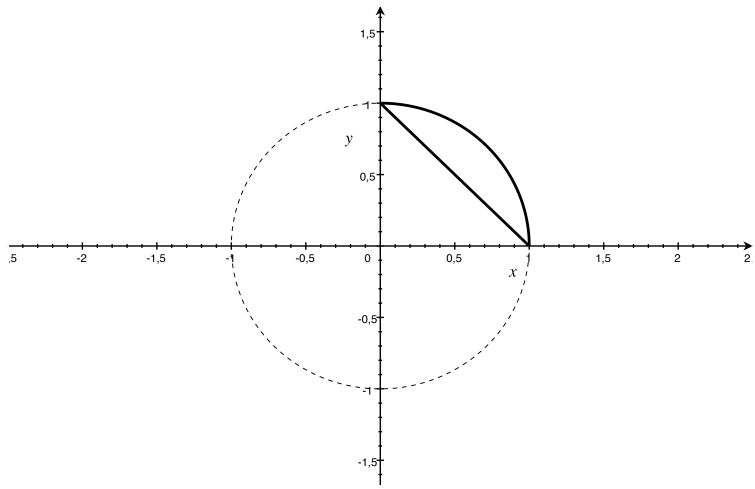

FIGURE 1. L'insieme di integrazione A dell'Esercizio 11.

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti)**.** *Sia* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 1,\, y \ge 1-x\}$, *si calcoli l'integrale doppio*

$$\iint_A \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy.$$

Soluzione. Si osservi innanzitutto che l'insieme in questione è un insieme limitato di $\mathbb{R}^2$, che è $x-$semplice. Si può infatti scrivere come

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [0,1], 1-x \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}.$$

Tale insieme non contiene l'origine $(0,0)$, la funzione da integrare è quindi continua su A. Ne consegue che la funzione in questione è Riemann integrabile su A e quindi l'integrale doppio in questione è ben definito.

Passiamo adesso al calcolo effettivo dell'integrale. Usando le coordinate polari

$$x = \varrho \cos\vartheta, \qquad y = \varrho \sin\vartheta,$$

l'insieme in questione si descrive prendendo

$$\vartheta \in [0, \pi/2] \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{\cos\vartheta + \sin\vartheta} \le \varrho \le 1.$$

Il nuovo insieme di integrazione è quindi l'insieme $\varrho-$semplice dato da

$$\Omega = \left\{(\varrho, \vartheta) \,:\, \vartheta \in [0, \pi/2],\, \frac{1}{\cos\vartheta + \sin\vartheta} \le \varrho \le 1\right\}.$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned}
\iint_A \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy &= \iint_\Omega \frac{1}{\varrho^4}\, \varrho\, d\varrho\, d\vartheta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{1}{\cos\vartheta + \sin\vartheta}}^1 \frac{1}{\varrho^3}\, d\varrho \right) d\vartheta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2\,\varrho^2} \right]_{\frac{1}{\cos\vartheta + \sin\vartheta}}^1 d\vartheta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{(\cos\vartheta + \sin\vartheta)^2}{2} - \frac{1}{2} \right] d\vartheta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\, \sin\vartheta\, d\vartheta = \left[\frac{\sin^2\vartheta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Questo conclude l'esercizio. $\square$

Esercizio 12 (7 punti)**.** *Sia* $\mathbf{F}$ *il campo vettoriale definito su* $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ *da*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right).$$

(1) *Si dica se* $\mathbf{F}$ *è conservativo su* $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$*. In caso affermativo, se ne calcoli un potenziale;*

(2) *si dica se* $\mathbf{F}$ *è solenoidale su* $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$*;*

(3) *si calcoli il flusso di* $\mathbf{F}$ *attraverso gli insiemi* Σ *e* ∂E*, dove*

$$\Sigma = \Big\{(x,y,z) \,:\, x^2+y^2+z^2 = 1\Big\} \qquad e \qquad E = \left\{(x,y,z) \,:\, \frac{1}{2} \le x^2+y^2+z^2 \le 1\right\}.$$

Soluzione. Si osservi che l'insieme di definizione di $\mathbb{F}$ non è stellato, quindi se anche dimostrassimo che $\mathbf{F}$ è irrotazionale, questo non ci direbbe niente. In ogni caso, prima di mettersi a calcolarne il rotore, conviene ricordarsi (visto anche a lezione) che $\mathbb{F}$ non è nient'altro che il gradiente della funzione "modulo". In altre parole, se introduciamo

$$U(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

sappiamo che U è una funzione C^1 su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ e che vale

$$\mathbf{F} = \nabla U, \qquad \text{su } \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}.$$

Questo dimostra che $\mathbf{F}$ è conservativo.

Per dire se è solenoidale, calcoliamone la divergenza: si ottiene

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{F}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
&= \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.
\end{aligned}$$

L'ultima quantità non è identicamente nulla, quindi $\mathbf{F}$ non è solenoidale.

Per calcolare il flusso attraverso Σ, usiamo la definizione

$$\iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma(x,y,z),$$

ed osserviamo che in tutti i punti di Σ, $\mathbf{F}$ coincide proprio con la normale $\mathbb{N}$, che prenderemo per comodità uscente. Si ha quindi

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle = |\mathbf{N}| = 1.$$

Per calcolare il flusso attraverso Σ, non dobbiamo quindi far altro che calcolare

$$\iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma(x,y,z) = \iint_\Sigma d\sigma(x,y,z) = \text{Area}(\Sigma).$$

Ricordando che l'area di una sfera di raggio R è data da $4\,\pi\,R^2$, si ottiene quindi che il flusso in questione vale $4\,\pi$.

Per quanto riguarda il flusso attraverso ∂E, usiamo il Teorema della Divergenza (si osservi che E non contiene l'origine). Si ha allora

$$\iint_{\partial E} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma(x,y,z) = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx\, dy\, dx = \iiint_E \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \, dx\, dy\, dz.$$

L'ultimo integrale si calcola adesso agilmente usando le coordinate sferiche

$$\begin{aligned}
x &= \varrho \cos\vartheta \, \sin\varphi, \\
y &= \varrho \sin\vartheta \, \sin\varphi, \;\; ccc \\
z &= \varrho \cos\varphi,
\end{aligned}$$

con

$$\varrho \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right], \qquad \vartheta \in [0, 2\,\pi], \qquad \varphi \in [0, \pi],$$

e ricordando che

$$dx\, dy\, dz = \varrho^2 \, \sin\varphi \, d\varrho \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Si ottiene allora

$$\begin{aligned}\iint_{\partial E} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma(x,y,z) = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx\, dy\, dx &= \iiint_E \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dx\, dy\, dz \\ &= \int_0^{2\,\pi} \int_0^{\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{2}{\varrho}\, \varrho^2 \, \sin\varphi \, d\varrho\, d\vartheta\, d\varphi \\ &= 4\,\pi \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2\,\pi.\end{aligned}$$

Questo conclude l'esercizio. $\square$