Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2017/2018

`Libri, appunti e calcolatrici` **non ammessi**

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Trovare un potenziale U del campo vettoriale conservativo* $\mathbf{F}(x,y) = (y/(x^2\,y^2+1), x/(x^2\,y^2+1))$

$$U(x,y) = \arctan(x\,y)$$

Esercizio 2. *Si calcoli il seguente limite*

$$\lim_{n\to\infty} n\,\sin\left(\frac{1}{2\,n}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{2\,e}$$

Esercizio 3. *Trovare l'insieme dei punti critici C della funzione* $f(x,y,z) = \log(1+x^2+(y-1)^2)\,\cos(z)$

$$C = \{(0,1,z)\ :\ z \in \mathbb{R}\}$$

Esercizio 4. *Sia* $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$, *si calcoli il seguente integrale doppio*

$$\iint_E e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = 2\,\pi\,e^2$$

Esercizio 5. *Si trovino l'estremo superiore e l'estremo inferiore sull'insieme $(0,+\infty)$ della seguente funzione*

$$\sup_{x\in(0,+\infty)} \frac{2\,x+1}{3\,x+2} = \frac{2}{3} \qquad\qquad \inf_{x\in(0,+\infty)} \frac{2\,x+1}{3\,x+2} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 6. *Quali tra i seguenti insiemi di livello rappresentano una curva regolare?*

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ (x-1)^2\,(y+1)=0\} \qquad \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ e^{x+y}=1\} \qquad \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\,\cos y = 0\}$$

Esercizio 7. *Dare lo sviluppo di Taylor fino all'ordine 3 centrato in 0 con resto di Peano, della funzione*

$$f(x) = \frac{1}{1-\arctan x} = 1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)$$

Esercizio 8. *Dire quali tra le seguenti serie numeriche risultano convergenti*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^7\,\frac{(140)^n}{n!} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n\,n!}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Esercizio 9. *Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione* $f(x,y) = \arctan(x^2\,y+1)$ *nel punto* $(-1,0,\pi/4)$.

$$z = \frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}$$

Esercizio 10. *Data la direzione* $\omega = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \in \mathbb{R}^3$ *e la funzione* $f(x,y,z) = z\,e^{x+y}$, *si calcoli*

$$\frac{\partial f}{\omega}(1,-1,1) = \sqrt{3}$$

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti)**.** *Sia* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0,\, |y| \leq x/\sqrt{3} \ \text{ e } \ x^2+y^2 \leq 4\}$*. Si calcoli l'integrale doppio*

$$\iint_D \frac{|y|}{x}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$$

Soluzione. L'insieme di integrazione si descrive in coordinate polari

$$x = \varrho\cos\vartheta, \qquad y = \varrho\sin\vartheta,$$

come

$$D = \left\{(\varrho,\vartheta) \,:\, 0 \leq \varrho < 2,\, -\frac{\pi}{6} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{6}\right\}.$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{|y|}{x}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\int_0^2 \frac{|\sin\vartheta|}{\cos\vartheta}\sqrt{1+\varrho^2}\,\varrho\,d\varrho\,d\vartheta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^2 \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\sqrt{1+\varrho^2}\,\varrho\,d\varrho\,d\vartheta \\
&= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\,d\vartheta\right)\left(\int_0^2 \varrho\sqrt{1+\varrho^2}\,d\varrho\right) \\
&= 2\Big[-\log\cos\vartheta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}\left[\frac{1}{3}(1+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 \\
&= \frac{2}{3}\log\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{125}-1\right).
\end{aligned}$$

□

Esercizio 12 (9 punti)**.** *Sia* $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^2*, tale che*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x,y,z) = 1, \qquad \text{per ogni } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Si calcoli l'integrale di superficie

$$\iint_{\partial C} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_C}\,d\sigma,$$

dove $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1\}$ *e* $\mathbf{n}_C$ *rappresenta il versore normale uscente al bordo* ∂C *di* C*.*

Soluzione. Usando il Teorema della Divergenza per il campo vettoriale $\mathbf{F} = \nabla u$, si ha

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial C} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_C}\,d\sigma &= \iint_{\partial C} \nabla u \cdot \mathbf{n}_C\,d\sigma \\
&= \iiint_C \operatorname{div}(\nabla u)\,dx\,dy\,dz \\
&= \iiint_C \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] dx\,dy\,dz.
\end{aligned}$$

Per ipotesi, la funzione integranda nell'ultimo integrale è identicamente uguale a 1, quindi si ottiene

$$\iint_{\partial C} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_C}\,d\sigma = \iiint_C dx\,dy\,dz = \mathrm{Vol}(C).$$

Per determinare il volume dell'insieme C, osserviamo che si tratta di un cono di altezza 1 e base di raggio 1: possiamo usare le formule geometriche elementari oppure gli strumenti dell'analisi. Procediamo in questo secondo modo: possiamo prendere il volume del cilindro di raggio 1 e altezza 1 (che vale π), in seguito sottrarci il volume del sottografico della funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Si ha quindi

$$\mathrm{Vol}C = \pi - \iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \pi - \int_0^{2\pi}\int_0^1 \varrho^2\,d\varrho\,d\vartheta = \frac{\pi}{3}.$$

□