Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2018/2019

`Libri, appunti e calcolatrici` **`non ammessi`**

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Si dica per quali α la serie seguente risulta convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n!}\,(e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1) \qquad \alpha > 2$$

Esercizio 2. *Si trovi una primitiva F della funzione $f(x) = x\,\cos x$*

$$F(x) = x\,\sin x + \cos x$$

Esercizio 3. *Si dica quali tra i seguenti sono punti sella della funzione $f(x,y) = 2\,x^2 - 4\,x + 2 + y^2 + 4\,x\,y - 4\,y$*

$$(0,0) \qquad (-1,0) \qquad (1,0) \qquad (1,1) \qquad (0,1)$$

Esercizio 4. *Si calcoli la lunghezza ℓ della curva $\gamma(t) = (\cos(t^2), \sin(t^2), t^2)$ con $t \in [0,\pi]$*

$$\ell = \sqrt{2}\,\pi^2$$

Esercizio 5. *Si calcoli il lavoro L del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = (-y,x)$ lungo una circonferenza di raggio R e centro (x_0,y_0), percorsa in senso anti-orario*

$$L = 2\,\pi\,R^2$$

Esercizio 6. *Sia f derivabile 3 volte in $x=0$, tale che valga lo sviluppo di Taylor $f(x) = 1 - x + x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$. Si dica quanto vale la derivata terza di f in $x=0$*

$$f'''(0) = 6$$

Esercizio 7. *Si calcoli il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \log(1-x) + 1 - \cos x}{\sin x - \tan x} = \frac{2}{3}$$

Esercizio 8. *Si consideri l'insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}$, si calcoli l'integrale*

$$\int_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \pi\,\frac{15}{4}$$

Esercizio 9. *Dire quali tra le seguenti serie numeriche risultano convergenti*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-3}{n^5+6\,n^2-2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{e^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\,\tan\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$$

Esercizio 10. *Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = \arctan(x+y+1)$ nel punto $(\sqrt{3}-1, 0, \pi/3)$.*

$$z = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}\,(x+1-\sqrt{3}) + \frac{1}{4}\,y$$

Seconda parte

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti)**.** *Sia $U:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ il potenziale dato da*

$$U(x,y,z)=\frac{x^4+y^4+z^4}{12}.$$

Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}=\nabla U$ attraverso la frontiera ∂E dell'insieme

$$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2+z^2\le 1,\,0\le z\le\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

Si calcoli inoltre il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo il percorso

$$\Gamma=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2+z^2=1,\,z=\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

Soluzione. Il flusso che dobbiamo calcolare è definito come

$$\Phi=\iint_{\partial E}\langle\mathbf{F},\mathbf{N}\rangle\,d\sigma.$$

Dal momento che la superficie ∂E è la frontiera di un insieme chiuso e limitato, possiamo usare il Teorema della Divergenza, ed ottenere quindi

$$\Phi=\iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}\,dx\,dy\,dz.$$

Osserviamo adesso che

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\Delta U=x^2+y^2+z^2.$$

Inoltre, possiamo parametrizzare E usando le coordinate cilindriche

$$x=\varrho\cos\vartheta,\quad y=\varrho\sin\vartheta,\qquad z=t,$$

con $t\in[0,\sqrt{3}/2]$, $\vartheta\in[0,2\pi]$ e $0\le\varrho\le\sqrt{1-z^2}$. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned}\Phi&=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{1-z^2}}(\varrho^2+z^2)\,\varrho\,d\varrho\,d\vartheta\,dz\\&=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left[\frac{\varrho^4}{4}+\frac{\varrho^2}{2}\,z^2\right]_0^{\sqrt{1-z^2}}dz\\&=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left[\frac{(1-z^2)^2}{4}+\frac{z^2}{2}\,(1-z^2)\right]dz\\&=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1-z^4}{4}\,dz\\&=2\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{8}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5\frac{1}{20}\right)=\pi\,\frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{71}{80}.\end{aligned}$$

Per calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo il circuito indicato, ci basta osservare che $\mathbf{F}$ è conservativo per costruzione. Quindi tale lavoro è nullo. □

Esercizio 12 (7 punti)**.** *Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile e si consideri la superficie*

$$\phi(t,\vartheta)=(f(t)\cos\vartheta,f(t)\sin\vartheta,\vartheta),\qquad(t,\vartheta)\in[a,b]\times[0,2\pi].$$

(1) *Si trovino le condizioni su f che garantiscano che la superficie ϕ è regolare;*

(2) *si prenda quindi $f(t)=e^t$ e si scelga l'intervallo $[a,b]=[1,2]$. Si calcoli l'area del sostegno della superficie ϕ corrispondente;*

(3) *con le scelte del punto precedente, si prenda il campo vettoriale*

$$\mathbf{F}(x,y,z)=(-y,x,z),$$

e si calcoli il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso il sostegno della superficie ϕ.

Soluzione. Procediamo per punti.

(1) affinché ϕ sia regolare, bisognerà intanto che f sia di classe C^1, ovvero che sia continua, derivabile e con derivata continua. Dopo di che, dobbiamo imporre che risulti

$$\left|\frac{\partial \phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta}\right| \neq 0, \qquad \text{per ogni } (t,\vartheta) \in [a,b] \times [0, 2\,\pi].$$

Calcoliamo questo prodotto vettoriale: si ha

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = (f'(t)\,\cos\vartheta,\; f'(t)\,\sin\vartheta, 0),$$

e

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} = (-f(t)\,\sin\vartheta, f(t)\,\cos\vartheta, 1).$$

Quindi

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} = (f'(t)\,\sin\vartheta, f'(t)\,\cos\vartheta, f(t)\,f'(t)),$$

da cui infine

$$\left|\frac{\partial \phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta}\right| = \sqrt{(f'(t))^2 + (f'(t)\,f(t))^2} = |f'(t)|\,\sqrt{1+(f(t))^2}.$$

Quindi ϕ è regolare se

$$f'(t) \neq 0, \qquad \text{per ogni } t \in [a,b].$$

(2) prendiamo adesso $f(t) = e^t$ definita sull'intervallo $[1,2]$. Si osservi che $f'(t) = e^t \neq 0$ per ogni $t \in [1,2]$, quindi per il punto precedente la superficie

$$\phi(t,\vartheta) = (e^t\,\cos\vartheta, e^t\,\sin\vartheta, \vartheta), \qquad \text{con } (t,\vartheta) \in [1,2] \times [0, 2\,\pi],$$

è una superficie regolare. L'area del suo sostegno $S = \mathrm{Im}(\phi)$ è data dall'integrale doppio

$$\begin{aligned}\iint_S d\sigma &= \int_0^{2\,\pi}\int_1^2 \left|\frac{\partial \phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta}\right|\,dt\,d\vartheta \\ &= \int_0^{2\,\pi}\int_1^2 e^t\,\sqrt{1+e^{2\,t}}\,dt\,d\vartheta \\ &= 2\,\pi \int_1^2 e^t\,\sqrt{1+e^{2\,t}}\,dt \\ &= 2\,\pi \int_e^{e^2} \sqrt{1+x^2}\,dx,\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il cambio di variabile $x = e^t$. L'ultimo integrale può adesso essere calcolare, utilizzando per esempi la sostituzione $x = \sinh s$.

(3) Calcoliamo intanto il rotore di $\mathbf{F}$, esso è dato da

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = (0,0,2).$$

Usando la definizione di flusso, si ha

$$\begin{aligned}\Phi = \iint_S \langle \mathrm{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{N}\rangle\,d\sigma &= \int_0^{2\,\pi}\int_1^2 \left\langle (0,0,2), \frac{\partial \phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta}\right\rangle\,dt\,d\vartheta \\ &= \int_0^{2\,\pi}\int_1^2 2\,e^t\,e^t\,dt\,d\vartheta \\ &= 4\,\pi \int_1^2 e^{2\,t}\,dt = 2\,\pi\,[e^{2\,t}]_1^2 = 2\,\pi\,e^2\,(e^2-1).\end{aligned}$$

Questo conclude l'esercizio.

$\square$