Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA A & B
– PROVA SCRITTA –

`Libri, appunti e calcolatrici` **non ammessi**

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso in cui lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione* $f(x,y) = y \arcsin x$ *nel punto* $(0,1,f(0,1))$

$$z = x$$

Esercizio 2. *Si trovi una primitiva* F *della funzione* $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

$$F(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

Esercizio 3. *Si calcoli la lunghezza del sostegno della curva* $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ *definita su* $[0,1]$

$$\ell(\gamma) = \frac{1}{27}\left[(13)^{\frac{3}{2}} - 8\right]$$

Esercizio 4. *Si calcoli il lavoro del campo* $\mathbf{F}(x,y) = (e^x \sin y, e^x \cos y)$ *lungo il sostegno della curva* $\gamma(t) = (\arctan t, t)$ *con* $t \in [0,\pi]$

$$L = 0$$

Esercizio 5. *Si dica quali tra le seguenti serie numeriche risultano convergenti*

$$\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \log\frac{n^2+1}{n^2-2}} \qquad \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n e^n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\arctan(n)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$$

Esercizio 6. *Si dica quali tra i seguenti campi vettoriali risultano conservativi sul loro insieme di definizione*

$$\boxed{\mathbf{F}(x,y) = (y,x)} \qquad \mathbf{G}(x,y) = (-y,x) \qquad \mathbf{H}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \qquad \boxed{\mathbf{K}(x,y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)}$$

Esercizio 7. *Si calcoli il seguente limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{3x}-1)(\sin x - x)}{\sqrt{1-x^2} - \cos x} = 3$$

Esercizio 8. *Si dica quali tra le seguenti funzioni radialmente simmetriche risultano differenziabili in* $(0,0)$

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \boxed{g(x,y) = \sin(x^2+y^2)} \qquad h(x,y) = \sin\sqrt{x^2+y^2} \qquad k(x,y) = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$$

Esercizio 9. *Si calcoli il volume del seguente solido tridimensionale* $E = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1, |z| \le 1/2\}$

$$\mathrm{Vol}(E) = \frac{11\pi}{12}$$

Esercizio 10. *Si trovino i punti critici della funzione* $f(x,y) = x^4 + 3x^2 y - y$ *e li si classifichino*

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{9}\right) \text{ punti sella}$$

Seconda parte

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti). *Sia* $f(x,y,z) = 1-(x^2+y^2+z^2)$ *e sia*

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \le 1\right\}.$$

Si dica se f *ammette massimo e/o minimo su* E*. In caso affermativo, li si calcolino.*

Soluzione. Si osservi innanzitutto che la funzione f è continua su E. Quest'ultimo insieme è chiuso, in quanto è della forma

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, g(x,y,z) \le 0\right\},$$

dove g è la funzione su $\mathbb{R}^3$ definita da

$$g(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1.$$

Inoltre, non è difficile vedere che l'insieme E è limitato, per esempio esso è contenuto nella palla di centro $(0,0,0)$ e raggio 3. Dal *Teorema di Weierstrass*, abbiamo allora che f ammette massimo e minimo su E.

Per trovarli, dividiamo il problema in due:

- cercheremo prima eventuali punti di massimo/minimo sull'interno di E, ovvero su
$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} < 1\right\};$$
- poi, cercheremo eventuali punti di massimo/minimo sulla frontiera di E, ovvero sull'insieme
$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1\right\}.$$

Per il primo punto, sappiamo dal *Teorema di Fermat* che eventuali punti di massimo/minimo sono da cercarsi tra i punti critici di f. Si ha

$$\nabla f(x,y,z) = (0,0,0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y = z = 0.$$

L'unico punto critico di f è quindi $(0,0,0)$. Osserviamo che si ha

$$f(0,0,0) = 1.$$

Per quanto riguarda il secondo punto, vogliamo usare il *Teorema dei moltiplicatori di Lagrange*. È facile vedere che il vincolo

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, g(x,y,z) = 0\right\},$$

è regolare (ovvero sono soddisfatte le ipotesi del *Teorema di Dini*). Infatti l'unico punto critico di g è $(0,0,0)$, che non appartiene al vincolo. Inoltre, f è C^1 su tutto $\mathbb{R}^3$, quindi i punti che ci interessano sono da cercare tra le soluzioni del sistema seguente

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) &= \lambda\, \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) &= 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} -2\,x &= 2\,\lambda\, x \\ -2\,y &= \dfrac{\lambda}{2}\, y \\ -2\,z &= \dfrac{2\,\lambda}{9}\, z \\ x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} &= 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\,(\lambda+1) &= 0 \\ y\,(\lambda+4) &= 0 \\ z\,(\lambda+9) &= 0 \\ x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} &= 1 \end{cases}$$

Cominciamo dalla prima equazione: si hanno due possibilità

$$x = 0 \qquad \text{oppure} \qquad \lambda = -1.$$

Nel caso della seconda possibilità, dalla seconda e terza equazione si ottiene direttamente

$$y = z = 0,$$

e dall'equazione di vincolo si ottiene allora direttamente

$$x^2 = 1 \qquad \text{ovvero} \qquad x = \pm 1.$$

Abbiamo quindi trovato i due candidati $P_1 = (1,0,0)$ e $P_2 = (-1,0,0)$.

Supponiamo quindi adesso che $x = 0$, allora il sistema in esame diventa

$$\begin{cases} y\,(\lambda+4) &= 0 \\ z\,(\lambda+9) &= 0 \\ \dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9} &= 1. \end{cases}$$

Di nuovo, guardando la prima equazione, abbiamo due possibilità

$$y = 0 \qquad \text{oppure} \qquad \lambda = -4.$$

Nella seconda eventualità, si trova dalla seconda equazione

$$z = 0,$$

e dall'equazione di vincolo si ottiene allora direttamente

$$y^2 = 4 \qquad \text{ovvero} \qquad y = \pm 2.$$

Abbiamo quindi trovato i due candidati $P_3 = (0, 2, 0)$ e $P_4 = (0, -2, 0)$.

Infine, se $y = 0$ (e contemporaneamente, come detto, anche $x = 0$), si ha allora dall'equazione di vincolo

$$z^2 = 9 \qquad \text{ovvero} \qquad z = \pm 3.$$

Questo ci da gli ulteriori candidati $P_5 = (0, 0, 3)$ e $P_6 = (0, 0, -3)$.

Al fine di determinare massimo e minimo, non resta dunque che valutare f in tutti i punti trovati: avevamo già osservato che $f(0, 0, 0) = 1$, inoltre

$$f(P_1) = f(P_2) = 1-1 = 0, \qquad f(P_3) = f(P_4) = 1-4 = -3, \qquad f(P_5) = f(P_6) = 1-9 = -8.$$

Abbiamo allora

$$\max_E f = f(0,0,0) = 1 \qquad \text{e} \qquad \min_E f = f(0,0,\pm 3) = -8.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 12 (7 punti)**.** *Si consideri il campo vettoriale*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x, y, z^2 + \frac{y}{x}\right), \qquad \textit{per } (y,z) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0.$$

Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}$ *attraverso gli insiemi seguenti*

$$E = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y^2 + z^2 \le 1,\, x = 1\Big\},$$

e

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1\Big\}.$$

Soluzione. Per calcolare il flusso attraverso E, si dovrà usare la definizione, ovvero dovremo calcolare l'integrale di superficie seguente

$$\iint_E \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}\rangle \, d\sigma(x,y,z).$$

Si osservi che E coincide con il disco di centro $(1, 0, 0)$, raggio 1 e posizionato in modo ortogonale all'asse delle x. Tale insieme possiamo vederlo come il sostegno della superficie regolare

$$\phi(t,s) = (1, t\,\cos s, t\,\sin s), \qquad \text{con } (t,s) \in \overline{A} = [0,1] \times [0, 2\,\pi].$$

Si osservi che

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,s) = (0, \cos s, \sin s) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial t}(t,s) = (0, -t\,\sin s, t\,\cos s),$$

da cui

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,s) \times \frac{\partial \phi}{\partial s}(t,s) = \det \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \cos s & \sin s \\ 0 & -t\,\sin s & t\,\cos s \end{vmatrix} = (t, 0, 0).$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} \iint_E \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}\rangle \, d\sigma(x,y,z) &= \iint_{[0,1]\times[0,2\,\pi]} \left\langle \mathbf{F}(\phi(t,s)), \frac{\partial \phi}{\partial t}(t,s) \times \frac{\partial \phi}{\partial s}(t,s) \right\rangle dt\,ds \\ &= \iint_{[0,1]\times[0,2\,\pi]} t\,dt\,ds = 2\,\pi \int_0^1 t\,dt = \pi. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il secondo flusso, possiamo osservare che l'insieme D coincide con la frontiera dell'insieme limitato

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x-2)^2 + y^2 + z^2 < 1\},$$

che è la palla di raggio 1, centrata in $(2, 0, 0)$. Si osservi che $\mathbf{F} \in C^1(\overline{B})$, possiamo quindi applicare il *Teorema della Divergenza*, osservando che

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x,y,z) = 1 + 1 + 2\,z = 2\,(1+z).$$

Si ha allora che il flusso attraverso D è dato da

$$\begin{aligned}\iint_D \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma(x,y,z) = \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F}(x,y,z) \, dx \, dy \, dz &= 2 \iiint_B (1+z) \, dx \, dy \, dz \\ &= 2 \iiint_B \, dx \, dy \, dz + 2 \iiint_B z \, dx \, dy \, dz \\ &= 2 \, \frac{4}{3} \, \pi + 2 \iiint_B z \, dx \, dy \, dz.\end{aligned}$$

Si vede infine facilmente che l'ultimo integrale fa zero, dal momento che B è simmetrico rispetto al piano $z = 0$ e la funzione $z \mapsto z$ è dispari. In definitiva, il secondo flusso è dato da $8/3\,\pi$ (si ricordi che, avendo usando il *Teorema della Divergenza*, il versore normale $\mathbf{N}$ va considerato uscente). □