Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2016/2017

`Libri, appunti e calcolatrici` **non ammessi**

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Si calcoli la lunghezza della curva grafico di* $f(x) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)$ *per* $x \in [1,2]$.

$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{f'(x)^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{2} |x|\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Esercizio 2. *Si calcoli il seguente limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

Esercizio 3. *Dire per quale* $a \in \mathbb{R}$ *il seguente campo vettoriale è conservativo su* $\mathbb{R}^2$.

$$\left(x\,e^{x^2+y^2} + (a^2-\pi)\,e^{y^2}, y\,e^{x^2+y^2}\right) \qquad a = \pm\sqrt{\pi}$$

Esercizio 4. *Dire per quali* $\alpha \in \mathbb{R}$ *l'integrale seguente risulta convergente*

$$\int_1^{\infty} \tan\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) dx \qquad \alpha > 1$$

Esercizio 5. *Si trovi l'insieme dei punti critici* C *della funzione* $f(x,y) = e^y x^2(x+y)$.

Sicuramente i punti della retta $x = 0$ sono critici perché soddisfano il sistema

$$\begin{cases} f_x = e^y x(3x+2y) = 0, \\ f_y = e^y x^2(1+x+y) = 0. \end{cases}$$

Per vedere se ci sono altri punti critici, assumiamo $x \neq 0$ e risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 3x+2y = 0, \\ 1+x+y = 0, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x = 2, \\ y = -3. \end{cases}$$

Dunque anche $(2,-3)$ è un punto critico. In conclusione $C = (\{0\}\times\mathbb{R}) \cup \{(2,-3)\}$.

Esercizio 6. *Si calcoli il limite seguente*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x^2}}{\log\frac{1+x^6}{x^6}} = -\frac{1}{6}$$

Esercizio 7. *Dire quali tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ rappresentano una curva regolare*

$$\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon e^y x^2(x+y)=1\big\}\,,\qquad \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon \frac{x\,y+1}{y+1}=1\Big\}\,,\qquad \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon |x|+|y|=1\big\}\,.$$

• Pongo $f(x,y)=e^y x^2(x+y)$ ed osservo che per l'esercizio 5

$$\begin{cases} f_x=0,\\ f_y=0,\end{cases}\qquad\Leftrightarrow\qquad (x,y)\in(\{0\}\times\mathbb{R})\cup\{(2,-3)\}.$$

Siccome $f(0,y)=0\neq 1\neq -4/e^3=f(2,-3)$, la prima curva è regolare.
• Pongo $f(x,y)=\frac{x\,y+1}{y+1}$ ed osservo che

$$\begin{cases} f_x=\frac{y}{y+1}=0,\\ f_y=\frac{x-1}{(y+1)^2}=0,\end{cases}\qquad\Leftrightarrow\qquad (x,y)=(1,0).$$

Siccome $f(1,0)=1$, la seconda curva non è regolare.
• Pongo $f(x,y)=|x|+|y|$ ed osservo che essa non è C^1 nei punti $(\pm1,0)$, $(0,\pm1)$ che appartengono alla curva $f(x,y)=1$, dunque la terza curva non è regolare.

Esercizio 8. *Dire quali tra le seguenti serie numeriche risultano convergenti*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\log n}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\,10^{2n}}{n!}$$

Esercizio 9. *Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x,y)=x+2\,y+1$ nel punto $(1,0,2)$.*

$$z=x+2\,y+1$$

Esercizio 10. *Si trovi una primitiva F della funzione $f(x)=\cos^2x+\sin^2x$.*

$$F(x)=x$$

Seconda parte

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti). *Sia $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + 4\,y^2 \leq 1\}$. Si calcolino gli integrali doppi*

$$\iint_E x^2\,dx\,dy \qquad e \qquad \iint_E y^2\,dx\,dy.$$

Svolgimento. Si osservi innanzitutto che l'insieme E rappresenta un'ellisse, avente semiassi di lunghezza 1 (semiasse orizzontale) e $1/2$ (semiasse verticale). Chiamiano

$$E_1 = \{(x,y) \in E \,:\, x \geq 0\} \qquad \text{e} \qquad E_2 = \{(x,y) \in E \,:\, y \geq 0\},$$

allora si osserva che per simmetria si ha

$$\iint_E x^2\,dx\,dy = 2\iint_{E_1} x^2\,dx\,dy \qquad \text{e} \qquad \iint_E y^2\,dx\,dy = 2\iint_{E_2} y^2\,dx\,dy.$$

I due integrali da calcolare sono del tutto simili, limitiamoci a calcolare il primo. Si ha

$$\begin{aligned}
\iint_{E_1} x^2\,dx\,dy = \int_0^1 x^2 \left(\int_{-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}} dy\right) dx &= \int_0^1 x^2\,\sqrt{1-x^2}\,dx \\
&\overset{x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\cos^2 t\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(2\,t))^2}{4}\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(4\,t)}{8}\,dt \\
&= \left[\frac{t}{8} - \frac{\sin(4\,t)}{32}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}.
\end{aligned}$$

In conclusione si ottiene

$$\iint_E x^2\,dx\,dy = 2\iint_{E_1} x^2\,dx\,dy = \frac{\pi}{8}.$$

Il calcolo del secondo integrale è del tutto similie. $\square$

Esercizio 12 (7 punti). *Verificare il Teorema della divergenza per il campo vettoriale*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3, y^3, 1)$$

e la regione

$$\Omega = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1,\ |z| \leq 1\Big\}.$$

Svolgimento. Verifico la formula del Teorema della divergenza

$$(***) \qquad \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial\Omega}\rangle\,\mathrm{d}\sigma,$$

dove $\mathbf{N}_{\partial\Omega}$ è il versore normale uscente. Osservo che Ω è il cilindro definito da $x^2 + y^2 \leq 1$ delimitato dai piani $z = -1$ e $z = 1$, mentre $\partial\Omega = \{x^2+y^2 = 1,\ -1 \leq z \leq 1\}$ è formato dalla superficie laterale del cilindro, unito ai due "tappi". Calcoliamo l'integrale a sinistra nella (***). Osservo che

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = 3x^2 + 3y^2.$$

Per calcolare tale integrale, utilizziamo le coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\vartheta, \\ y = \varrho\sin\vartheta, \\ z = z. \end{cases}$$

Il determinante jacobiano di tale cambio di coordinate è dato da:

$$J(\varrho,\vartheta,z) = \left|\det\begin{pmatrix}\cos\vartheta & -\varrho\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \varrho\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right| = \varrho$$

e la regione Ω nelle nuove coordinate è descritta dalle relazioni

$$\varrho \in [0,1], \qquad \vartheta \in [0,2\pi], \qquad z \in [-1,1].$$

Pertanto, l'integrale triplo cercato è dato da

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_{-1}^1 (3\,\varrho^2\,\cos^2\vartheta + 3\,\varrho^2\,\sin^2\vartheta)\,\varrho\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varrho = 6\pi\left(\frac{1}{4}\varrho^4\Big|_0^1\right) = \frac{3}{2}\pi.$$

Per calcolare il termine a destra nella (***), osserviamo che

$$(****) \qquad \iint_{\partial\Omega}\langle\mathbf{F},\mathbf{N}_{\partial\Omega}\rangle\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{S_1}\langle\mathbf{F},\mathbf{N}_1\rangle\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{S_2}\langle\mathbf{F},\mathbf{N}_2\rangle\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{S_3}\langle\mathbf{F},\mathbf{N}_3\rangle\,\mathrm{d}\sigma,$$

dove $\mathbf{N}_i$ sono i versori normali uscenti a S_i, $i = 1,2,3$, insiemi definiti rispettivamente da:

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad -1 \leq z \leq 1; \\ &x^2 + y^2 \leq 1 \qquad \text{e} \qquad z = -1; \\ &x^2 + y^2 \leq 1 \qquad \text{e} \qquad z = 1. \end{aligned}$$

L'insieme S_1 è il sostegno della superficie

$$\Phi(\vartheta,t) = (\cos\vartheta, \sin\vartheta, t), \qquad \text{con } \vartheta \in [0,2\pi],\ t \in [-1,1].$$

La direzione normale a tale superficie è quella del vettore $\Phi_\vartheta \times \Phi_t$, dove

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = (-\sin\vartheta, \cos\vartheta, 0), \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial t} = (0,0,1).$$

Pertanto

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\times\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \det\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = (\cos\vartheta, \sin\vartheta, 0).$$

Si osservi che tale vettore ha la direzione della normale uscente. Quindi, l'integrale di superficie cercato è dato da

$$\iint_{S_1}\langle\mathbf{F},\mathbf{N}_1\rangle\,\mathrm{d}\sigma = \int_{-1}^1\int_0^{2\pi}\langle(\cos^3\vartheta,\sin^3\vartheta,1),(\cos\vartheta,\sin\vartheta,0)\rangle\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^1\int_0^{2\pi}(\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\pi,$$

avendo calcolato (per parti) gli integrali

$$\int_0^{2\pi}\cos^4\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \int_0^{2\pi}\sin^4\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{3}{4}\pi.$$

L'insieme S_2 è il sostegno della superficie

$$\Phi(\varrho,\vartheta) = (\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta, -1), \qquad \text{con } \vartheta \in [0,2\pi],\ \varrho \in [0,1].$$

Calcoliam o

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = (-\varrho \sin\vartheta, \varrho\cos\vartheta, 0)\,, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} = (\cos\vartheta, \sin\vartheta, 0)\,,$$

pertanto

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\varrho\sin\vartheta & \varrho\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, \varrho).$$

Si osservi che la normale uscente ha la direzione di

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta},$$

quindi l'integrale di superficie cercato è dato da

$$\iint_{S_2} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_2 \rangle \,\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \langle (\varrho^3\cos^3\vartheta, \varrho^3\sin^3\vartheta, 1), (0,0,-\varrho)\rangle \,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varrho = \int_0^1 \int_0^{2\pi} -\varrho \,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varrho = -\pi.$$

Infine, l'insieme S_3 è il sostegno della superficie

$$\Phi(\varrho, \vartheta) = (\varrho\,\cos\vartheta, \varrho\,\sin\vartheta, 1), \qquad \text{con } \vartheta \in [0, 2\pi],\ \varrho \in [0,1].$$

Come prima, si ha

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\varrho\sin\vartheta & \varrho\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, \varrho).$$

Stavolta la normale uscente ha la direzione di

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}.$$

Quindi, l'integrale di superficie cercato è dato da

$$\iint_{S_2} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_3 \rangle \,\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \langle (\varrho^3\cos^3\vartheta, \varrho^3\sin^3\vartheta, 1), (0,0,\varrho)\rangle \,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varrho = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \varrho \,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varrho = \pi.$$

Sostituendo i tre valori nella (****) si ha

$$\iint_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial\Omega} \rangle \,\mathrm{d}\sigma = \frac{3}{2}\pi - \pi + \pi = \frac{3}{2}\pi,$$

e pertanto il Teorema della divergenza è verificato. $\square$