

Nome, Cognome

Matricola

ANALISI MATEMATICA A & B

– **PROVA SCRITTA** –

6 FEBBRAIO 2023

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2022/2023

Libri, appunti e calcolatrici non ammessi

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su un foglio bianco.

Al termine della prova, dovrà inviarne una foto

all'indirizzo `lorenzo.brasco@unife.it`

- Ogni esercizio vale 3 punti, in caso di risposta corretta

Esercizio 1. Si dica per quali valori del parametro $\alpha > 0$ la serie seguente converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n!} \right)^{\alpha} \left(\sin \left(\frac{1}{n^{3\alpha}} \right) \right)^2 \quad \alpha > \frac{1}{5}$$

Esercizio 2. Trovare e classificare i punti critici della funzione $f(x, y) = x^2 y + x y + y^2$

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{8} \right) \text{ punto di minimo locale} \quad (0, 0), (-1, 0) \text{ punti sella}$$

Esercizio 3. Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \log(\cos x) + x^2}{x \sin x - x^2} = 1$$

Esercizio 4. Si dica quali tra le seguenti affermazioni risultano corrette per $x \rightarrow 0$

$$\boxed{\sin x \sim x} \quad \boxed{x^2 \sim x^2 - x^3} \quad \boxed{1 - \cos x = o(x)} \quad (e^x - 1) - x \sim 0 \quad \frac{\log(1+x^2)}{\sin x} = o(x)$$

Esercizio 5. Si trovi il potenziale U del campo vettoriale conservativo $\mathbf{F}(x, y, z) = (y/z, x/z, -(xy)/z^2)$ tale che $U(0, 0, 1) = 1$

$$U(x, y, z) = \frac{xy}{z} + 1$$

Esercizio 6. Si dia una curva regolare γ il cui sostegno coincida con l'insieme $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 2, y \geq 0\}$

$$\gamma(t) = (\sqrt{2} \cos t + 1, \sqrt{2} \sin t), \quad t \in [0, \pi]$$

Esercizio 7. Si calcoli la derivata di $f(x, y) = \arctan(2x + y)$ nel punto $(1, 1)$ lungo la direzione $\omega = (\sqrt{3}/2, 1/2)$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(1, 1) = \frac{\sqrt{3}}{10} + \frac{1}{20}$$

Esercizio 8. Si calcoli il limite della seguente successione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} \left(1 + \frac{23}{n} \right)^n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = e^{22}$$

Esercizio 9. Si calcoli l'area del grafico di $f(x, y) = xy$ definita sull'insieme $A = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, y \geq 0\}$

$$\text{Area} = \frac{\pi}{3} \left(3^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \right)$$

Esercizio 10. Si calcoli il momento d'inerzia dell'insieme $\Sigma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\}$ rispetto all'asse y

$$M = \frac{\pi}{2}$$

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.

Esercizio 11 (7 punti). Sia $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ e sia

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 9z^2.$$

Si dica se f ammette massimo e minimo su E , giustificando la risposta. In caso affermativo, si determinino, specificando anche i corrispondenti punti di massimo e di minimo.

Esercizio 12 (9 punti). Si consideri il potenziale

$$U(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Siano $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva definita da

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad \text{per } t \in [0, \pi],$$

e $\Sigma, V \subseteq \mathbb{R}^3$ gli insiemi dati da

$$V = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\} \quad \text{e} \quad \Sigma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Si calcoli:

- (1) Il lavoro del campo generato da U lungo il sostegno di γ ;
- (2) il flusso del campo generato da U attraverso ∂V ;
- (3) il flusso del campo generato da U attraverso Σ .