Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2016/2017

`Libri, appunti e calcolatrici` **non ammessi**

PRIMA PARTE

- *Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.*
- *La seconda parte verrà corretta* **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*
- *Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.*

Esercizio 1. *Si calcoli la lunghezza L della curva $\gamma(t) = \left(\log\left(t^2-1\right), -t\right)$, con $t \in [2,3]$.*

Risposta: $L = 1 + \log(3/2)$

Esercizio 2. *Dire quali fra i seguenti campi vettoriali sono conservativi su $\mathbb{R}^2$*

$$\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{y^2+1}}, -\frac{xy(x^2+3)}{3(y^2+1)^{3/2}}\right), \qquad \left(\frac{x^2+1}{y^2+1}, -\frac{2xy(x^2+3)}{3(y^2+1)^2}\right), \qquad \left(\tan(x)\arctan(2y), -\frac{2\ln(\cos(x))}{4y^2+1}\right).$$

Risposta: $\boxed{\text{sì}}$ $\boxed{\text{no}}$ $\quad$ $\boxed{\text{sì}}$ $\boxed{\text{no}}$ $\quad$ $\boxed{\text{sì}}$ $\boxed{\text{no}}$

Esercizio 3. *Dire per quale $\alpha > 0$ il seguente campo vettoriale è conservativo su $\mathbb{R}^2$*

$$\left(\ln\left(2+\alpha\left(x^2+y^2\right)\right), \frac{2y}{\sqrt{2+y^2}} \ \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2+y^2}}\right) + \sqrt{2}\alpha\right).$$

Risposta: $\alpha = 1$

Esercizio 4. *Calcolare il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x - 1} - 1}{1-\cos(2x)} = -\frac{1}{4}$$

Esercizio 5. *Tra le serie seguenti, evidenziare quelle convergenti*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + n^2}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{n} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$$

Risposta: $\boxed{\text{sì}}$ $\boxed{\text{no}}$ $\quad$ $\boxed{\text{sì}}$ $\boxed{\text{no}}$ $\quad$ $\boxed{\text{sì}}$ $\boxed{\text{no}}$ $\quad$ $\boxed{\text{sì}}$ $\boxed{\text{no}}$

Esercizio 6. *Dire per quali $\alpha > 0$ la serie seguente risulta convergente*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, n^2}{\alpha^{n^2}}$$

Risposta: $\alpha > 1$

Esercizio 7. *Trovare una primitiva F della funzione $x \mapsto \sqrt{x-3}$.*

Risposta: $F = \frac{2}{3}(x-3)^{3/2}$

Esercizio 8. *Usando uno sviluppo di Taylor fino all'ordine opportuno, calcolare il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^6)}{x^3\,\tan x^3 - e^{x^6} + 1} = -3$$

Esercizio 9. *Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione* $f(x,y) = y \arctan x$ *nel punto* $(1, 4/\pi, 1)$.

Risposta: $z = \dfrac{2}{\pi}\,(x-1) + \dfrac{\pi}{4}\,y$

Esercizio 10. *Calcolare la derivata direzionale* $\frac{\partial f}{\partial \omega}$ *della funzione* $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ *nel punto* $(1,2)$ *nella direzione* $\omega = \big(\sqrt{3}/2, 1/2\big)$.

Risposta: $\dfrac{\partial f}{\partial \omega} = \dfrac{3}{50}\,\big(2\sqrt{3} - 1\big)$

Seconda parte

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti)**.** *Data la funzione*

$$h(x,y) = x^2\,y + x\,\cos(2\,y) + \frac{1}{2},$$

si calcoli lintegrale

$$\iint_E h(x,y)\,dx\,dy,$$

dove

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0\}.$$

Soluzione. Il dominio E è normale rispetto a y, ovvero è della forma

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [a,b],\ f(x) \le y \le g(x)\big\}\,.$$

Più precisamente, si ha

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [-1,1],\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\},$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}\iint_E h(x,y)\,dx\,dy &= \int_{-1}^{1}\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left[x^2\,y + x\,\cos(2\,y) + \frac{1}{2}\right]dy\right)dx \\ &= \int_{-1}^{1}\left[\frac{x^2\,(1-x^2)}{2} + \frac{x}{2}\,\sin(2\sqrt{1-x^2}) + \frac{\sqrt{1-x^2}}{2}\right]dx \\ &= \int_{-1}^{1}\left[\frac{x^2\,(1-x^2)}{2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{2}\right]dx,\end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che

$$\int_{-1}^{1}\frac{x}{2}\,\sin(2\sqrt{1-x^2})\,dx = 0,$$

dato che l'integranda è una funzione dispari e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine. Si ottiene quindi

$$\iint_E h(x,y)\,dx\,dy = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{4}\,\left[x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{15} + \frac{\pi}{4}.$$ □

Esercizio 12 (7 punti)**.** *Sia* $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x, x+y, x+y+z)$ *e* C *la curva ottenuta intersecando il piano* $z = y$ *con il cilindro* $x^2 + y^2 = 1$ *orientata in senso antiorario attorno al cilindro. Calcolare la circuitazione di* $\boldsymbol{F}$ *lungo* C

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\,ds.$$

Soluzione. Una parametrizzazione di C è data da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Sia Σ la superficie parametrizzata da $\alpha : \overline{G} \to \mathbb{R}^3$ definita da $\alpha(\rho, t) = (\rho\cos t, \rho\sin t, \rho\sin t)$ per ogni $(\rho, t) \in \overline{G}$, essendo $G = (0,1) \times (0, 2\pi)$. Chiaramente $\partial\Sigma = C$. Per il teorema di Stokes si ha

$$\iint_\Sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t}\, ds.$$

Osserviamo che

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \nabla \wedge \boldsymbol{F} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & x+y & x+y+z \end{pmatrix} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{n} = \alpha_\rho \wedge \alpha_t = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \cos t & \sin t & \sin t \\ -\rho\sin t & \rho\cos t & \rho\cos t \end{pmatrix} = -\rho\boldsymbol{j} + \rho\boldsymbol{k},$$

e quindi

$$\iint_\Sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \\ \rho \end{pmatrix} dt\, d\rho = 2\int_0^2 \int_0^{2\pi} \rho\, dt\, d\rho = 2\pi.$$