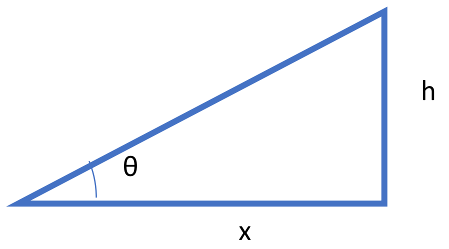
PROBLEMA 65



Dati:

$x = (85.0 \pm 0.4)m$

$\theta = (0.285 \pm 0.001)rad$

Risoluzione:

$h = x\ \tan\theta = 85.0\ m \times 0.2930 = 24.90\ m$

a) **Con formule prudenti:**

Formula generale:

$$\delta h = \left|\frac{\partial h}{\partial x}\right| \delta x + \left|\frac{\partial h}{\partial \theta}\right| \delta\theta = \tan\theta\,\delta x + x\frac{1}{\cos^2\theta}\delta\theta = 0.2930 \times 0.4 + 85\frac{1}{0.9210} \times 0.001 = 0.2095$$

$$\rightarrow \mathrm{h} = (24.9 \pm 0.2)\ \mathrm{m}$$

Alternativamente, partendo dalla formula del prodotto:

$$\frac{\delta h}{h} = \frac{\delta x}{x} + \frac{\delta \tan\theta}{\tan\theta} = \frac{\delta x}{x} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{1}{\cos^2\theta}\delta\theta$$

$$\rightarrow \delta h = \delta x\frac{h}{x} + \frac{h}{\tan\theta}\frac{1}{\cos^2\theta}\delta\theta = \delta x \tan\theta + \frac{x}{\cos^2\theta}\delta\theta$$

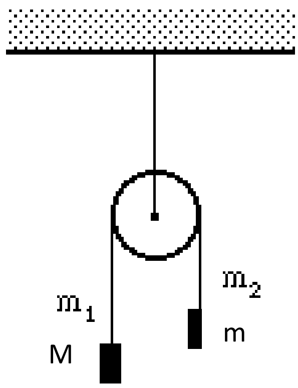
b) **Se accertata l'indipendenza delle misure, uso la formula per le variabili indipendenti:**

$$\delta h = \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 (\delta x)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \theta}\right)^2 (\delta\theta)^2\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$\delta h = \left[(\tan\theta)^2(\delta x)^2 + \left(x\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^2 (\delta\theta)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[0.2930^2 \times 0.4^2 + \left(85\frac{1}{0.9210}\right)^2 0.001^2\right]^{\frac{1}{2}} = 0.149\ m$$

$$\rightarrow h = (24.90 \pm 0.15)m$$

PROBLEMA 66



$g = (9.806 \pm 0.003)\frac{m}{s^2}$

$M = (2.431 \pm 0.002)kg$

$m = (1.12 \pm 0.01)kg$

$$\rightarrow a = g\frac{M - m}{M + m}$$

a.1) Usando le formule somma e prodotto, caso prudente:

Definisco: $m_1 = M - m = 1.311kg$; $m_2 = M + m = 3.511kg$

$$\rightarrow a = g\frac{m_1}{m_2} = 9.806\frac{1.311}{3.551} = 3.620\frac{m}{s^2}$$

$\delta m_1 = \delta m_2 = \delta M + \delta m = 0.002kg\ + 0.01kg = 0.012kg$

$\frac{\delta a}{a} = \frac{\delta g}{g} + \frac{\delta m_1}{m_1} + \frac{\delta m_2}{m_2} = \frac{0.003}{9.806} + \frac{0.012}{1.311} + \frac{0.012}{3.551} = 0.01284 = 1.28\%$

$\delta a = \left(\frac{\delta a}{a}\right) a = 3.620 \times 0.01284 = 0.0465\ \frac{m}{s^2}$

$$\rightarrow a = (3.62 \pm 0.05)\frac{m}{s^2}$$

a.2) Formula generale (a partire dei dati iniziali, senza passare per m_1 e m_2), caso prudente:

$\delta a = \left|\frac{\partial a}{\partial g}\right| \delta g + \left|\frac{\partial a}{\partial M}\right| \delta M + \left|\frac{\partial a}{\partial m}\right| \delta m =$

$\delta a = \left|\frac{M - m}{M + M}\right| \delta g + \left|\frac{(M + m) - (M - m)}{(M + m)^2} g\right| \delta M + \left|\frac{-(M + m) - (M - m)}{(M + m)^2} g\right| \delta m =$

$\delta a = \frac{2.431 - 1.12}{2.431 + 1.12} 0.003 + \frac{2 \times 1.12}{(2.431 + 1.12)^2} 9.806 \times 0.002 + \frac{2 \times 2.431}{(2.431 + 1.12)^2} 9.806 \times 0.01 =$

$$\delta a = 1.1076 \times 10^{-3} + 3.484 \times 10^{-3} + 37.81 \times 10^{-3} = 42.40 \times 10^{-3} ms^{-2} \simeq 0.04\ \frac{m}{s^2}$$

$$\rightarrow \quad a = (3.62 \pm 0.04)\frac{m}{s^2}$$

I risultati non coincidono. Manca in a.1) la compensazione degli errori, dovuta al fatto che δm_1 e δm_2 sono correlati, poiché contengono M e m nella loro formula. Il risultato più corretto pertanto rimane a.2)

b) Nel caso in cui accertiamo che le misure sono indipendenti, uso la formula generale di propagazione delle incertezze, con la somma in quadratura:

$\delta a = \left[\left(\frac{\partial a}{\partial g}\right)^2 (\delta g)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial M}\right)^2 (\delta M)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial m}\right)^2 (\delta m)^2\right]^{\frac{1}{2}} =$

$\delta a = \left[\left(1.1076 \times 10^{-3}\right)^2 + \left(3.484 \times 10^{-3}\right)^2 + \left(37.81 \times 10^{-3}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 37{,}98 \times 10^{-3}\frac{m}{s^2} \simeq 0.04\ \frac{m}{s^2}$

(Osservare che in questo caso il totale è poco più grande del solo contributo dovuto a $\left|\frac{\partial a}{\partial m}\right| \delta m$, che ha l'errore relativo più grande)

$$\rightarrow a = (3.62 \pm 0.04)\frac{m}{s^2}$$