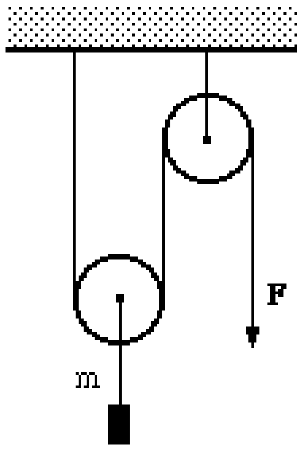
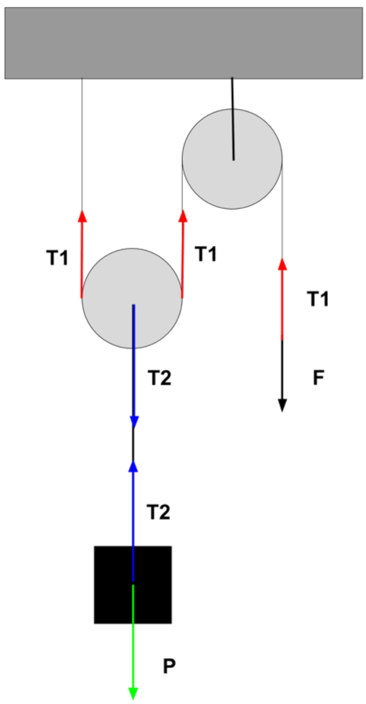
Problema 21



Nel sistema rappresentato in figura, sia m=10.0 kg. Si assuma trascurabile ogni forma di attrito, pulegge di massa trascurabile e una fune flessibile, inestensibile, di massa 10 g.
(a) Determinare la forza **F** che deve essere applicata affinché il sistema sia in equilibrio.
(b) Che tipo di equilibrio si tratta?
(c) Si rimpiazzi la forza con una massa m. Calcolare le accelerazioni e la tensione della fune.

Soluzione Punto (a)



Nonostante la fune abbia massa, poiché la massa della fune $m_F = 10$ g è molto inferiore alla massa applicata alla puleggia $m = 10.0$ kg, cioè $m \gg m_F$, possiamo trascurare il fatto che la fune abbia massa. Essendo la fune flessibile, inestensibile e non essendovi attrito, la tensione lungo la fune è costante.

Disegniamo il diagramma del corpo libero per le componenti del sistema in figura.

Sulla massa m agisce la forza peso $\overline{P} = m\overline{g}$ e la tensione della fune $\overline{T}_2$.

Sul punto di applicazione della forza $\overline{F}$ agisce la forza $\overline{F}$ e la tensione della fune $\overline{T}_1$.

Sulla puleggia a cui è appesa la massa m agiscono le due tensioni $\overline{T}_1$ e la tensione $\overline{T}_2$.

Prendiamo un sistema di riferimento parallelo alla forza peso e diretto verso il pavimento.

Le forze agenti lungo la direzione del sistema di riferimento sulla massa ($F_{\square 1}$), sul punto di applicazione della forza ($F_{\square 2}$) e sulla puleggia ($F_{\square 3}$) sono:

$$\begin{cases} \sum F_{\square y,1} = P - T_2 \\ \sum F_{y\square 2} = F - T_1 \\ \sum F_{y\square 3} = T_2 - T_1 - T_1 \end{cases}$$

Imponiamo che il sistema sia in equilibrio, quindi che $\sum F = 0$.

$$\begin{cases} P - T_2 = 0 \\ F - T_1 = 0 \\ T_2 - T_1 - T_1 = 0 \end{cases}$$

Otteniamo che:

$$\begin{cases} P = T_2 \\ F = T_1 \\ T_2 = 2T_1 \end{cases}$$

Sapendo che $P = mg$, otteniamo che

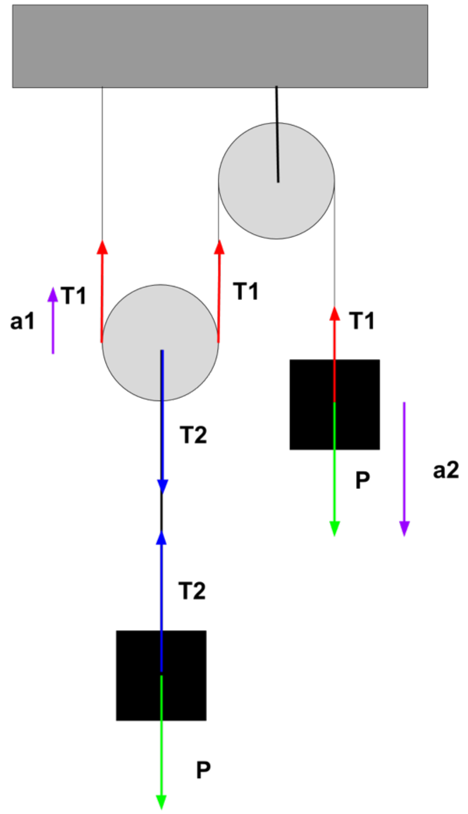
$$F = \frac{mg}{2}$$

La forza da applicare è dunque pari alla metà della forza peso applicata alla puleggia.

Soluzione Punto (b)

L'equilibrio del sistema è indifferente, in quanto per ogni piccola variazione del sistema si ha un nuovo punto di equilibrio. Nel caso di equilibrio instabile si avrebbe che, per ogni piccola variazione del sistema non è possibile tornare ad una condizione di equilibrio. Nel caso di equilibrio stabile, per ogni piccola variazione del sistema si torna alla stessa condizione di equilibrio.

Soluzione Punto (c)



Nonostante la fune abbia massa, poiché la massa della fune $m_F = 10$ g è molto inferiore alla massa applicata alla puleggia $m = 10.0$ kg, cioè $m \gg m_F$, possiamo trascurare il fatto che la fune abbia massa. Essendo la fune flessibile, inestensibile e non essendovi attrito, la tensione lungo la fune è costante.

Disegniamo il diagramma del corpo libero per le componenti del sistema in figura.

Sulla massa m attaccata alla puleggia agisce la forza peso $\overline{P} = m\overline{g}$ e la tensione della fune $\overline{T}_2$.

Sulla massa m non attaccata alla puleggia agisce la forza peso $\overline{P} = m\overline{g}$ e la tensione della fune $\overline{T}_1$.

Sulla puleggia a cui è appesa la massa m agiscono le due tensioni $\overline{T}_1$ e la tensione $\overline{T}_2$.

Prendiamo un sistema di riferimento parallelo alla forza peso e diretto verso il pavimento.

Le forze agenti lungo la direzione del sistema di riferimento sulla massa ($F_{\square 1}$), sul punto di applicazione della forza ($F_{\square 2}$), sulla puleggia ($F_{\square 3}$) e sulla fune ($F_{\square 4}$) sono:

$$\begin{cases} \sum F_{y\square 1} = P - T_2 = ma_1 \\ \sum F_{\square y,2} = P - T_1 = -ma_2 \\ \sum F_{\square y,3} = T_2 - T_1 - T_1 = m_p a_3 \end{cases}$$

Poiché il sistema non è in equilibrio, abbiamo che accelerazione della massa attaccata alla puleggia (a_1) e di quella non attaccata alla puleggia (a_2) sono differenti. Siccome la carrucola è ideale e in quiete e di massa trascurabile ($m_p = 0$), allora si ha $m_p a_3 = 0$. Sappiamo inoltre che $P = mg$. Sostituendo si ha che:

$$\begin{cases} mg - 2T_1 = -ma_1 \\ mg - T_1 = ma_2 \\ T_2 = 2T_1 \end{cases}$$

Sottraendo due volte la seconda equazione dalla prima si ottiene:

$$-mg = m(-a_1 - 2a_2)$$

Occorre trovare una relazione fra le due accelerazioni per risolvere l'equazione. Osserviamo che, se la massa non attaccata alla puleggia scende di un tratto Δy, tale tratto dovrà essere sottratto al tratto di fune che avvolge la puleggia. Bisognerà quindi prelevare un tratto di fune $\Delta y/2$ a sinistra e a destra della puleggia a cui è attaccata la massa. Poiché la variazione di spazio è linearmente proporzionale alla variazione dell'accelerazione nell'equazione del moto ($y(t) = \frac{1}{2}at^2$), si ha che $|a_2| = 2|a_1|$. Otteniamo dunque:

$$a_1 = \frac{1}{5}g$$

$$a_2 = 2a_1 = \frac{2}{5}g$$

Sostituendo i valori numerici si ha

$$a_1 = \frac{1}{5}9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1.96\ \mathrm{m/s^2}$$

$$a_2 = \frac{2}{5}9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 3.92\ \mathrm{m/s^2}$$

Dalle equazioni sopra ricaviamo T_1 in funzione della accelerazione trovata

$$T_1 = mg - ma_2 = m\left(g - \frac{2}{5}g\right) = \frac{3}{5}mg$$

Sostituendo i valori numerici si ha

$$T_1 = \frac{3}{5}10.0\ \mathrm{Kg}\ 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 6.00\ \mathrm{Kg_p} = 58.9\ \mathrm{N}$$