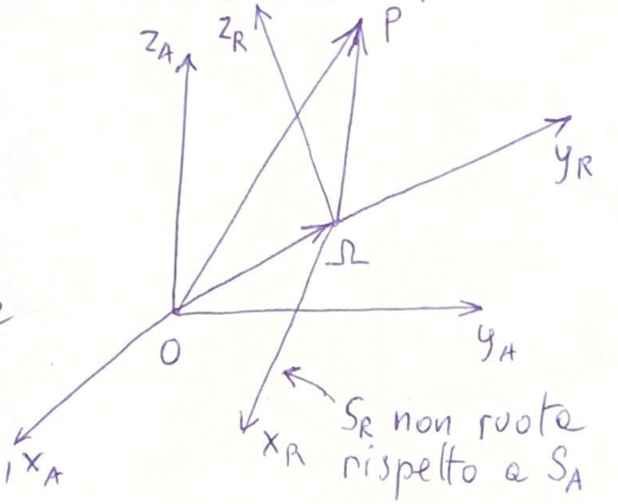
Cinematica dei moti relativi

Talvolta la descrizione del moto di una particella è più semplice in un SR rispetto ad un altro, che si muove in modo noto rispetto al primo. Si cerca pertanto di trasformare le quantità significative del moto rispetto ad un SR, detto assoluto (S_A) ad un altro, detto relativo (S_R).

(a) S_R in moto <u>puramente traslatorio</u> rispetto a S_A



$$\underbrace{\vec{OP}}_{} = \underbrace{\vec{O\Omega}}_{} + \vec{\Omega P}$$

$$\boxed{\vec{r}_A(t) = \vec{r}_\Omega(t) + \vec{r}_R(t)}$$

$\vec{r}_A(t)$ → vett. posizione risp. S_A

$\vec{r}_R(t)$ → vett. posizione risp. S_R

calcolo risp. a t_1 e $t_2 > t_1$

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_A(t_2) &= \vec{r}_\Omega(t_2) + \vec{r}_R(t_2) \\ \vec{r}_A(t_1) &= \vec{r}_\Omega(t_1) + \vec{r}_R(t_1) \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\Delta\vec{r}_A = \Delta\vec{r}_\Omega + \Delta\vec{r}_R}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}_A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}_\Omega}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}_R}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{v}_A(t) = \vec{v}_\Omega(t) + \vec{v}_R(t)}$$

$\vec{v}_R(t)$ → velocità relativa

$\vec{v}_\Omega(t)$ → velocità di Ω rispetto a O detta <u>velocità di trascinamento</u>

$\vec{v}_A(t)$ → velocità assoluta

Analogamente:

$$\boxed{\vec{a}_A(t) = \vec{a}_\Omega(t) + \vec{a}_R(t)}$$

Oss 1

Noto il moto di Ω rispetto a O, dunque noto $r_\Omega(t)$ è possibile trasformare la cinematica da S_A a S_R e viceversa

$$\begin{cases} \vec{r}_A(t) \\ \vec{v}_A(t) \\ \vec{a}_A(t) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{r}_R(t) \\ \vec{v}_R(t) \\ \vec{a}_R(t) \end{cases}$$

Oss2

Sia m una particella <u>isolata</u> e S_A un SRI $\Rightarrow$ $\vec{v}_A$ = costante

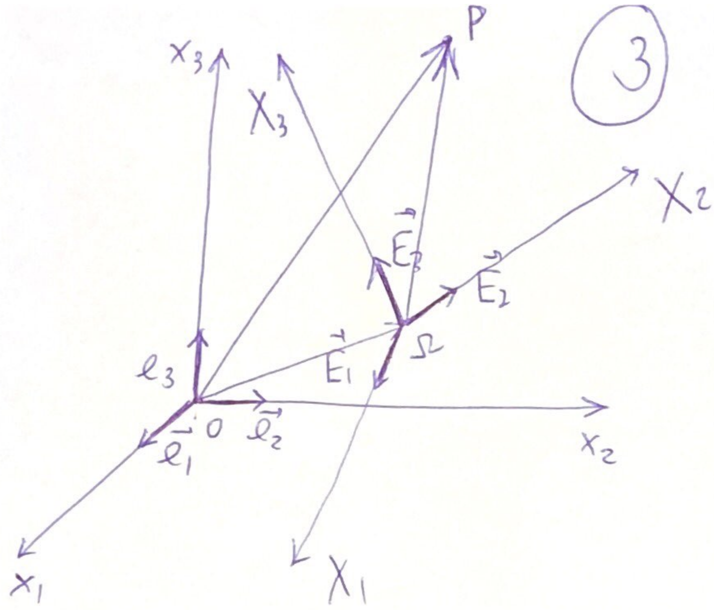
$$\vec{v}_A = \vec{v}_\Omega(t) + \vec{v}_R(t)$$

S_R è anch'esso inerziale $\vec{v}_R$=costante se e solo se $\vec{v}_\Omega$ = costante, cioè se S_R si ~~p~~ muove di MRU rispetto a S_A

(b) caso generale

$$\vec{O P} = \vec{O\Omega} + \vec{\Omega P}$$

$$\boxed{\vec{r}_A(t) = \vec{r}_\Omega(t) + \vec{r}_R(t)}$$



$$S_A \begin{cases} \vec{r}_A(t) = \sum_{J=1}^{3} x_J(t)\,\vec{e}_J \\ \vec{v}_A(t) = \sum_{J=1}^{3} \frac{dx_J}{dt}\,\vec{e}_J \\ \vec{a}_A(t) = \sum_{J=1}^{3} \frac{d^2x_J}{dt^2}\,\vec{e}_J \end{cases}$$

S_R può ruotare rispetto a S_A

$\vec{E}_1(t) \quad \vec{E}_2(t) \quad \vec{E}_3(t)$

$$S_R \begin{cases} \vec{r}_R(t) = \sum_{J=1}^{3} X_J(t)\,\vec{E}_J(t) \\ \vec{v}_R(t) = \sum_{J=1}^{3} \frac{dX_J}{dt}\,\vec{E}_J(t) \\ \vec{a}_R(t) = \sum_{J=1}^{3} \frac{d^2X_J}{dt^2}\,\vec{E}_J(t) \end{cases}$$

Si esprime in componenti la relazione fra i vett. pos.

$$\sum_{J=1}^{3} x_J(t)\,\vec{e}_J = \sum_{J=1}^{3} \xi_J(t)\,\vec{e}_J + \sum_{J=1}^{3} X_J(t)\,\vec{E}_J(t)$$

Si derivi rispetto al tempo

$$\underbrace{\sum_{J=1}^{3} \frac{dx_J}{dt}\,\vec{e}_J}_{\vec{v}_A(t)} = \underbrace{\sum_{J=1}^{3} \frac{d\xi_J(t)}{dt}\,\vec{e}_J}_{\vec{v}_\Omega(t)} + \underbrace{\sum_{J=1}^{3} \frac{dX_J}{dt}\,\vec{E}_J(t)}_{\vec{v}_R(t)} + \sum_{J=1}^{3} X_J(t)\,\frac{d\vec{E}_J}{dt}$$

velocità di trascinamento

$$\boxed{\vec{v}_{tr}(t) = \vec{v}_\Omega(t) + \sum_{J=1}^{3} X_J(t)\,\frac{d\vec{E}_J}{dt}}$$

$$\boxed{\vec{v}_A(t) = \vec{v}_{tr}(t) + \vec{v}_R(t)}$$

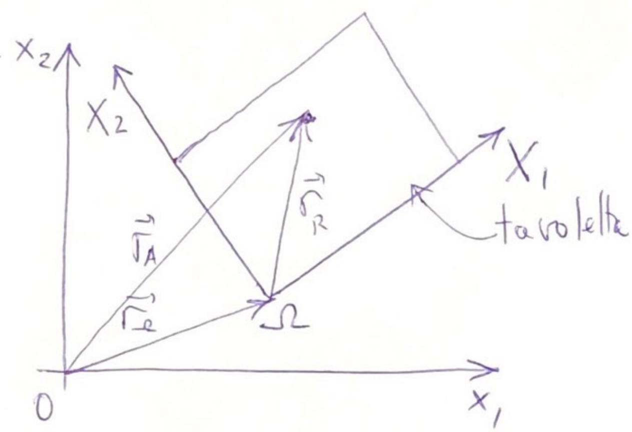
Oss 1

nel caso di moto puramente traslatorio, $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ non dipendono dal tempo e $\vec{v}_{tr}(t) = \vec{v}_\Omega(t)$ 4

Oss2

Per meglio comprendere il significato fisico della velocità di trascinamento, consideriamo una situaz. 2-D: una particella si muove rispetto ad una tavoletta di legno, la quale si muove sul piano x_1, x_2.

Immaginiamo che la particella faccia una macchia sulla tavoletta nella posizione dove si trova all'istante t.



Quanto vale la velocità della macchia rispetto a S_A:

$$\vec{v}_\Omega + \sum_{J=1}^{3} X_J(t) \frac{d\vec{E}_J}{dt}$$

che è proprio la velocità di trascinamento!

In generale, la velocità di trascinamento è la velocità di un punto geometrico di un punto istantaneamente in quiete, rispetto a S_A, nella posizione occupata dal PM nel suo moto.

Derivando l'espressione della velocità rispetto al tempo

$$\underbrace{\sum_{J=1}^{3} \frac{dx_J}{dt}\vec{e}_J}_{\vec{v}_A(t)} = \underbrace{\sum_{J=1}^{3} \frac{d\xi_J}{dt}\vec{e}_J + \sum_{J=1}^{3} X_J(t)\frac{d\vec{E}_J}{dt}}_{\vec{v}_{tr}(t)} + \underbrace{\sum_{J=1}^{3} \frac{dX_J}{dt}\vec{E}_J(t)}_{\vec{v}_R(t)}$$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{3} \frac{d^2 x_j}{dt^2} \vec{e}_j}_{\vec{a}_A(t)} = \underbrace{\sum_{j=1}^{3} \frac{d^2 \xi_j}{dt^2} \vec{e}_j}_{\vec{a}_\Omega(t)} + \sum_{j=1}^{3} \frac{dX_j}{dt} \frac{d\vec{E}_j}{dt} + \sum_{j=1}^{3} X_j(t) \frac{d^2 \vec{E}_j}{dt^2} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{j=1}^{3} \frac{d^2 X_j}{dt^2} \vec{E}_j(t)}_{\vec{a}_R(t)} + \sum_{j=1}^{3} \frac{dX_j}{dt} \frac{d\vec{E}_j}{dt} =$$

$$\vec{a}_A(t) = \underbrace{\vec{a}_\Omega(t) + \sum_{j=1}^{3} X_j(t) \frac{d^2 \vec{E}_j}{dt^2}}_{\vec{a}_{tr}(t)} + \vec{a}_R(t) + \underbrace{2 \sum_{j=1}^{3} \frac{dX_j}{dt} \frac{d\vec{E}_j}{dt}}_{\vec{a}_{co}(t)}$$

accelerazione di Coriolis

$$\boxed{\vec{a}_A(t) = \vec{a}_R(t) + \vec{a}_{tr}(t) + \vec{a}_{co}(t)}$$

Oss 1

Nel caso di sole traslazioni $\frac{d\vec{E}_j}{dt} = 0$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_{tr}(t) = \vec{a}_\Omega(t)$$

$$\vec{a}_{co}(t) = 0$$

Oss 2

Rispetto al caso traslatorio è emerso un nuovo termine detto accelerazione complementare o di Coriolis