Corpo rigido

Sistema di punti materiali tale che le interdistanze fra particelle rimango costanti nel tempo. Tale condizione è detta vincolo di corpo rigido)

$$|\vec{OP_i} - \vec{OP_j}| = |\vec{P_iP_j}| = r_{ij} = cost \quad i,j = 1, \dots, n \quad \forall t$$

Oss 1

Un corpo solido è spesso approssimabile con un corpo rigido

Oss 2

Il vincolo di corpo rigido è mantenuto ad ogni istante, indipendentemente dall'azione delle forze esterne. Questo significa che le forze interne reagiscono alle azioni esterne compensandole in modo da mantenere il vincolo di corpo rigido

Dinamica del corpo rigido

Le equazioni cardinali rappresentano uno strumento utile per lo studio della dinamica dei sistemi di particelle e pertanto anche di un corpo rigido (CR)

$$\begin{cases} \vec{F}^{(E)} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}_G & \leftarrow \text{particolarmente utile per lo studio delle traslazioni} \\ \vec{M}_O^{(E)} = \dfrac{d\vec{L}_O}{dt} & \leftarrow \text{particolarmente utile per lo studio delle rotazioni attorno ad O} \end{cases}$$

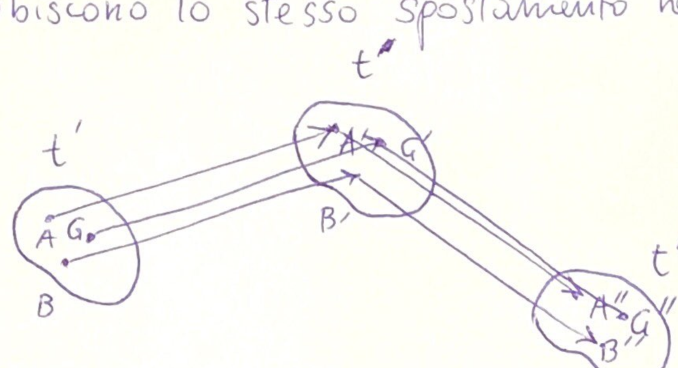
Oss

Si ricorda che le eq. cardinali forniscono informazioni parziali sul moto del sistema, ovvero informazione sul moto di insieme del sistema. Tuttavia, grazie al vincolo di corpo rigido, si vedrà che tali equazioni consentono la determinazione completa sul moto.

Moto traslatorio

Tutti i punti del CR subiscono lo stesso spostamento nel tempo

$$\boxed{\overrightarrow{A(t_1)A(t_2)} = \overrightarrow{B(t_1)B(t_2)} \quad \forall t_1, t_2,\ \forall A, B \in CR}$$



Sia G il CM del CR

Si applichi il teor del centro di massa:

$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$

$\overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{B'B''}$

$\vec{F}^{(E)} = m\vec{a}_G \implies$ si ricava il moto del CM ricavando $\vec{r}_G(t)$ rispetto ad un SRI.

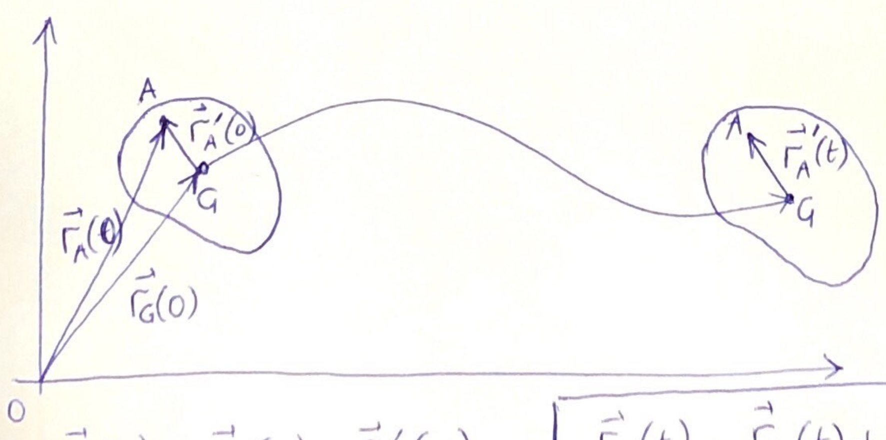
$\Downarrow$

tutti i punti del CR si spostano come il CM: $\Delta\vec{r}_A(t) = \Delta\vec{r}_G(t)$

$\forall t \quad \forall A \in CR$

Oss

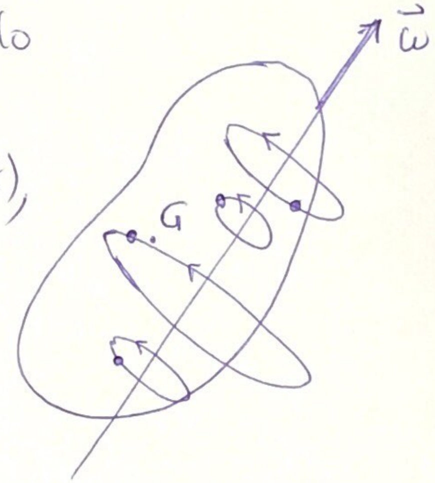
Il moto di un CR che compie sole traslazioni ha la stessa difficoltà nella risoluzione che un singolo PM. Le equazioni cardinali consentono la risoluzione esatta del problema



$\vec{r}_A(0) = \vec{r}_G(0) + \vec{r}\,'_A(0)$

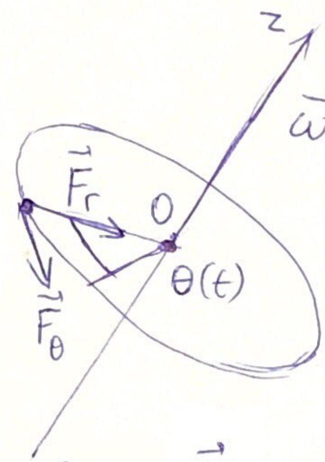
$$\boxed{\vec{r}_A(t) = \underbrace{\vec{r}_G(t)}_{\text{risolto dal teor CM}} + \underbrace{\vec{r}\,'_A(t)}_{\vec{r}\,'_A(0)} \quad \forall A}$$

Moto rotatorio attorno ad un asse fisso di rotazione



A causa del vincolo di corpo rigido tutti i punti si devono muovere con la stessa velocità angolare $\vec{\omega}(t)$, percorrendo orbite circolari coassiali.

Dunque ricavando l'angolo di rotazione di un qualsiasi punto del CR, si ricava il moto di tutti gli altri punti.



La forza totale agenti su un qualsiasi punto deve avere una componente radiale e una tangenziale, in quanto risulta in un MC.

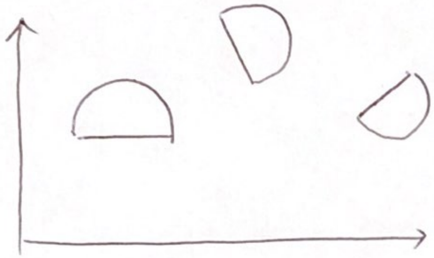
Scegliendo il polo nel centro della circonferenza, il momento della sola forza $\vec{F}_\theta$ produrrà un momento $\vec{M}_0$ tale che abbia una sola compon. z.

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = mr^2\frac{d\omega}{dt} = mr^2\alpha \qquad L_z = mr^2\omega =$$

Conoscendo M_z si ricava $\alpha(t)$ e conseguentemente $\theta(t)$, che è la stessa legge oraria per tutti i punti del CR. Poiché in M_z concorrono sia le forze interne che quelle esterne, tale metodo non è percorribile e dovremo ricorrere ad un altro approccio. Ad ogni modo si comprende la possibilità di arrivare ad una soluzione <u>completa</u> grazie alla seconda legge cardinale.

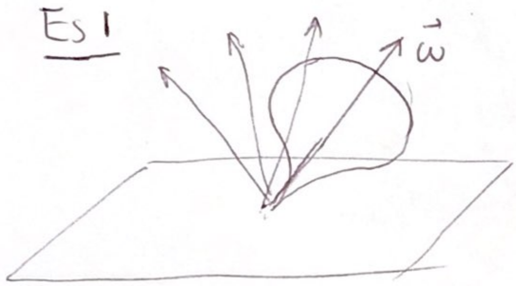
Caso generale

si può dimostrare che ad ogni istante di tempo il moto è la composizione di una traslazione più una rotaz. attorno ad un asse; tale composizione è detta **rototraslazione**



In generale l'asse di rotazione varia nel tempo, detto asse di istantanea rotazione

Es 1



← precessione dell'asse di istant. rotazione per una trottola (anche per il pianeta Terra, detta precessione degli equinozi)

Es 2

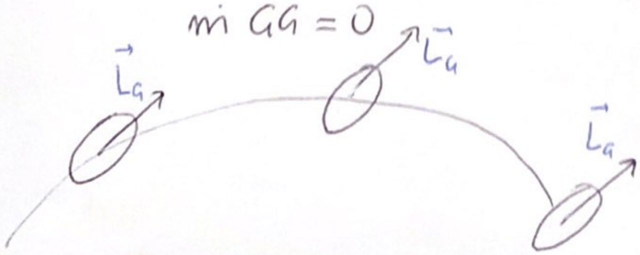
Corpo rigido sottoposto alla sola forza peso

$$\vec{F}^{(E)} = m\vec{a}_G = m\vec{g} \qquad \vec{a}_G = \vec{g}$$

CM percorre una parabola; pertanto il CM non ruota e l'asse di rotaz. deve passare per c

$$\vec{M}^{(E)}_G = \frac{d\vec{L}_G}{dt}$$

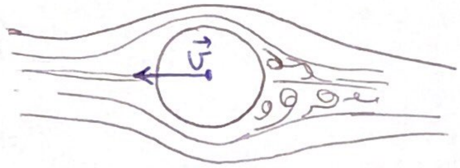
$$\vec{M}^{(E)}_G = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \vec{GP_j} \times m_j \vec{g}}_{m\vec{GG}=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_G = \text{costante}$$



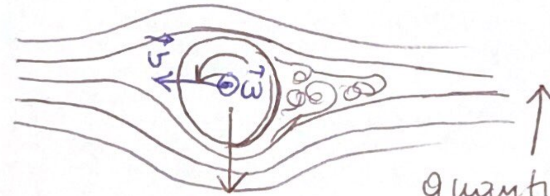
in generale $\vec{\omega}$ precede attorno a $\vec{L}_G$ a meno che non siano allineati

Oss

Se il CR si muove in aria la traiettoria non è più parabolica a causa dell'effetto Magnus



sfera non in rotaz.



forza della aria sulla sfera

quantità di moto trasf all'aria

Questo spiega "l'effetto" a calcio il top-spin a tennis, ecc.

Nel seguito supporremo di avere rotazione attorno ad un asse fisso di rotazione