Statica

①

studio dell'equilibrio dei corpi

Equilibrio meccanico

Una particella è in equilibrio meccanico se

$\vec{F}$ = somma tutte le forze $= 0 \iff$ MRU

Tale definizione vale in qualsiasi SRI

Equilibrio statico

Un punto è posizione di equilibrio statico per una particella rispetto ad un SRI se permane in quiete

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \quad \forall t$$

Oss

L'equilibrio statico è più forte dell'eq. meccanico, in quanto vale che condizione neces. e suff. per l'eq. statico è che:

i) valga l'eq. meccanico;

ii) la velocità iniziale sia nulla.

Dim

eq. statico $\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 \ \forall t \Rightarrow \vec{v}(t) = 0 \Rightarrow \vec{a}(t) = 0 \Rightarrow \vec{F}(t) = 0 \ \forall t$

Dim^{-1}

$$\vec{F} = 0 \ \forall t \Rightarrow \vec{a}(t) = 0 \ \forall t \Rightarrow \vec{v}(t) = \underbrace{\vec{v}(0)}_{0} + \int_0^t \underbrace{\vec{a}(t)}_{0} \, dt = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \underbrace{\vec{v}(t)}_{0} \, dt = \vec{r}_0 \quad \forall t \Rightarrow \text{eq. statico}$$

Equilibrio stabile

Un punto di equilibrio statico è stabile se, perturbando la posizione della particella dalla pos. di equilibrio, essa tende a ricondurvisi, qualsiasi sia stata la direzione dello spostamento.

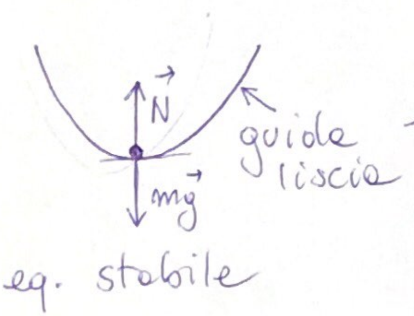
Equilibrio instabile

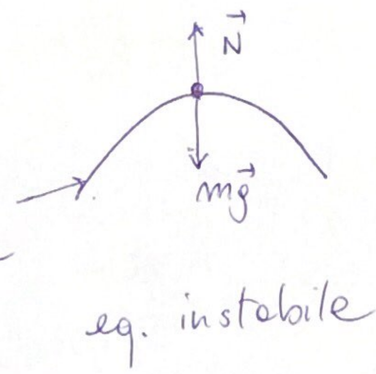
Quando non è stabile

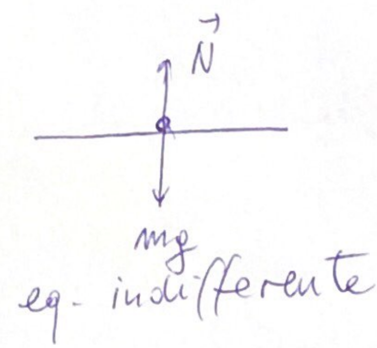
Equilibrio indifferente

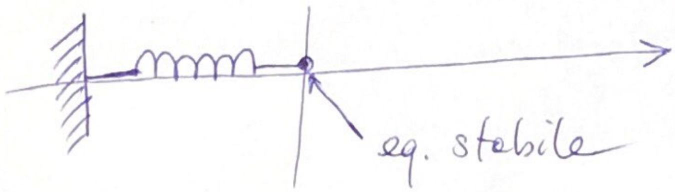
Se esiste un intorno di punti di equilibrio statico; è un caso particolare di instabilità.

Es 1-D

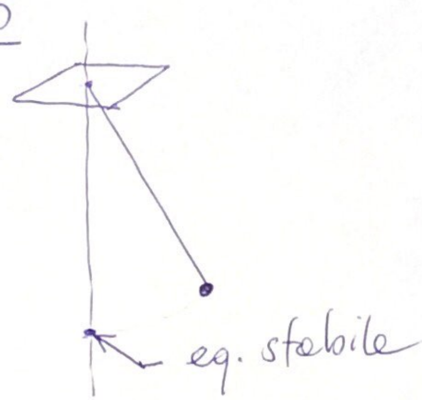


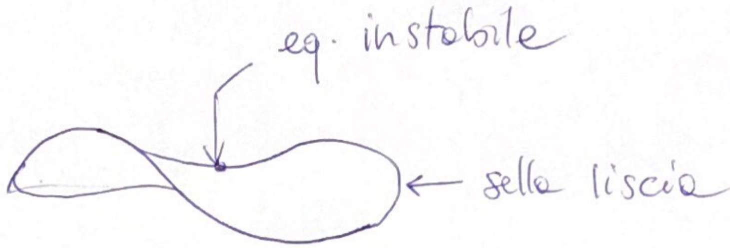


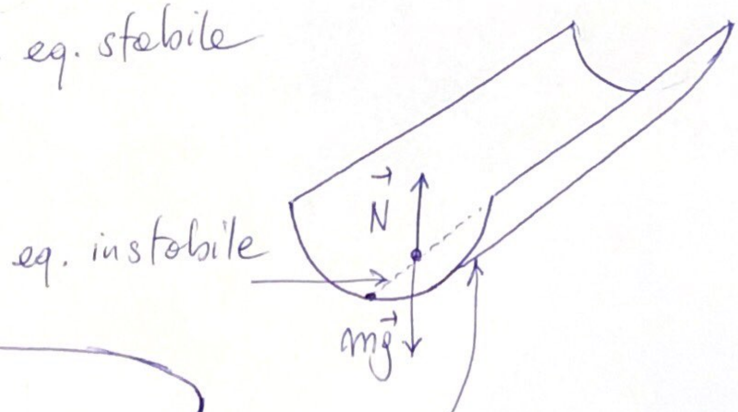


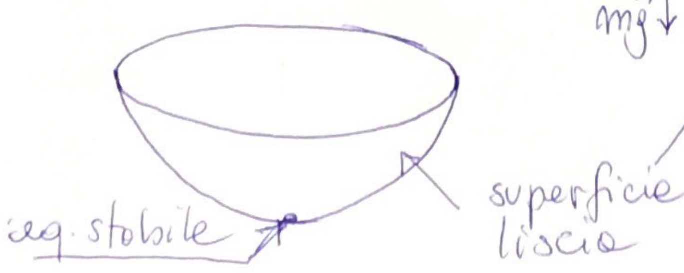


2-D









Equilibrio e forze conservative

Supponiamo che tutte le forze siano conservative

1-D

$$\mathcal{L}(x_1 \to x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{F(x)\,dx}_{d\mathcal{L}} = U(x_1) - U(x_2) = \Delta U \qquad U(x) = \text{en. pot. totale}$$

$$d\mathcal{L} = F(x)\,dx = -dU \quad \Rightarrow \quad \boxed{F(x) = -\frac{dU}{dx}}$$

3-D

$$\mathcal{L}(P_1 \to P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \underbrace{\vec{F} \cdot d\vec{r}}_{d\mathcal{L}} = U(P_1) - U(P_2) = \Delta U$$

$$d\mathcal{L} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU = -\left[\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right] = - \text{grad}\,U \cdot d\vec{r} = -\nabla U \cdot d\vec{r} \quad \forall d\vec{r}$$

$$\boxed{\vec{F} = -\text{grad}\,U}$$

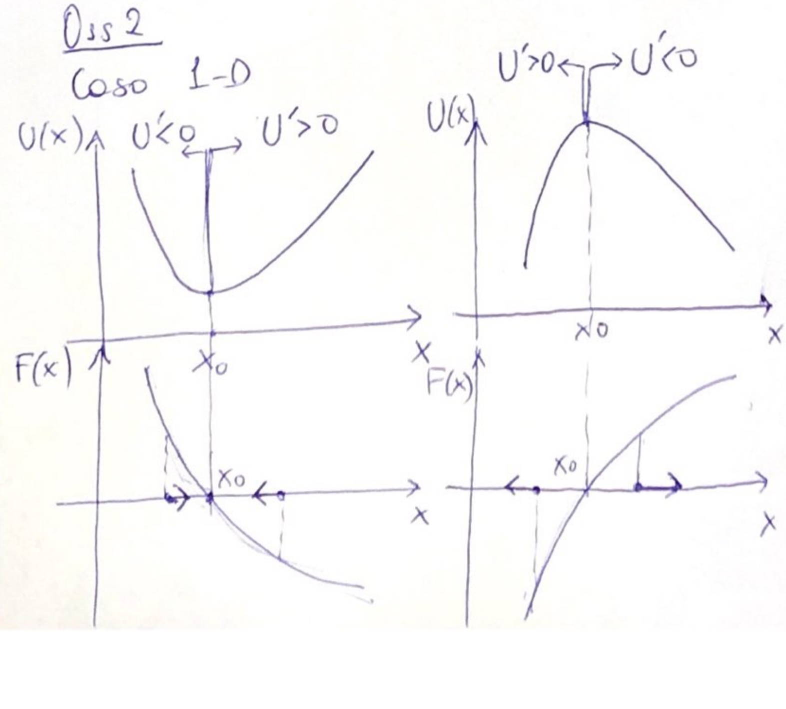
Oss1

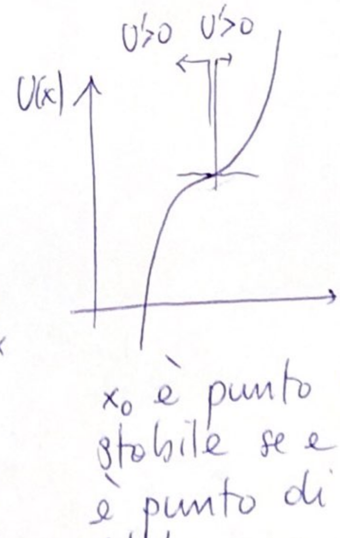
Un punto x_0 è di eq. statico se e solo se è un punto stazionario per l'en. potenziale totale.

$$\vec{F} = -\text{grad}\,U = 0 \qquad F(x) = -\frac{dU}{dx} = 0$$

Oss 2

Caso 1-D





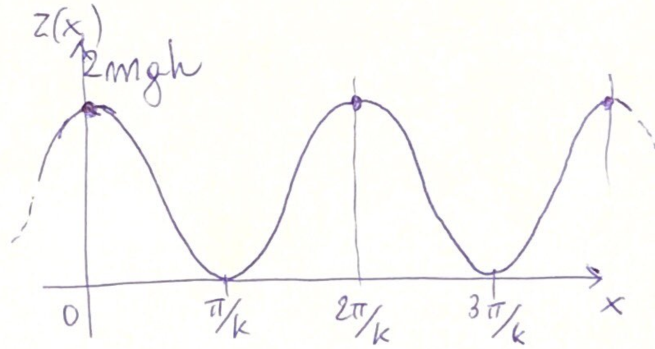
x_0 è punto di eq. stabile se e solo se è punto di minimo dell'energia potenziale

Es1

Una guida liscia ha forma sinusoidale del tipo:

$$z(x) = h(1 + \cos kx)$$

identificare e classificare i punti di equilibrio



$$U(x) = mg\,z(x) = $$
$$= mgh(1 + \cos kx)$$

$$0 = +\frac{dU}{dx} = mghk \sin kx \quad \Rightarrow \quad kx = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{x = \frac{n\pi}{k}}$$

punti di equilibrio $n \in \mathbb{Z}$
se n pari equilibrio instabile
se n dispari " stabile

Es2

Potenziale di Lennord-Jones (energia coesione solidi molecolari)

$$U(x) = E\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right] \qquad \sigma > 0 \quad E > 0$$

$$\frac{dU}{dx} = E\left[\sigma^{12}\frac{(-12)}{x^{13}} - \sigma^{6}\frac{(-6)}{x^{7}}\right] = 0 \qquad \frac{2\sigma^6}{x^6} = 1 \quad \Rightarrow \boxed{x_0 = 2^{1/6}\sigma}$$

posiz. di equilibrio

$$U(x_0) = E\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right] = -\frac{E}{4} = U(x_0)$$

Dall'analisi della derivata seconda o dal segno della derivata prima si deduce che è un punto di equilibrio stabile.