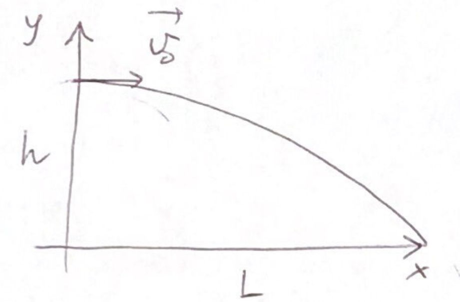
Introduzione alle variabili aleatorie

Fenomeno deterministico

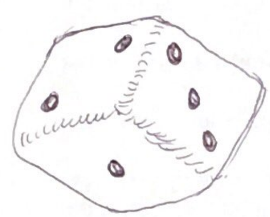
$$EM \begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$CI \begin{cases} x(0) = x_0 = 0 \\ y(0) = y_0 = h \\ v_x(0) = v_0 \\ v_y(0) = 0 \end{cases}$$



EM + CI $\Rightarrow$ è possibile prevedere in modo univoco, cioè deterministico, l'evoluz. temp. del sistema, p.es. determ. L

Fenomeno aleatorio



non è possibile prevedere in modo univoco l'evoluz. temp. del sistema, ossia è un concetto antitetico rispetto al fen. determ.

Oss 1

- I fenomeni deterministici non sono completam. tali a causa della limitata conoscenza che si ha di essi
- I fenomeni aleatori possono essere resi deterministici aumentando la conosc. del sistema

$\Rightarrow$ lo stato di conoscenza di un sistema indica se un fenomeno è prevalentemente deterministico o aleatorio

Oss 2

Una classe importante di fen. aleatorio è la misura di una G.F.

Prova

È il risultato dell'effettuazione di un esperimento se un fenomeno aleatorio ⇒ non vi è un risultato certo

Es

- voto ad un esame
- età di una persona
- tempo di attesa ad un appuntamento
- ogni mis. di una g.f.

Variabile aleatoria

È una qualsiasi funzione del risultato di una prova, ovvero è una variabile soggetta ad indeterminazione a priori, cioè il cui esito non è prevedibile con certezza prima dell'esecuzione della prova

v.a. { **discrete**: ~~conti~~ se la v.a. può assumere un numero finito o numerabile di valori
continue: se può assumere valori in un insieme non numerabile, p.es. un intervallo.

Campione

È un insieme di risultati di una prova

Es

$X \to x_1 = 26$, $X \to x_2 = 24$, ..., $X \to x_{10} = 25$

X → v.a.

$\underbrace{x_1, \dots, x_{10}}_{\text{campione di 10 prove} = n}$

26, 24, 26, 28, 23
24, 25, 24, 26, 25

Var. discrete

Frequenza, freq. relative, istogrammi

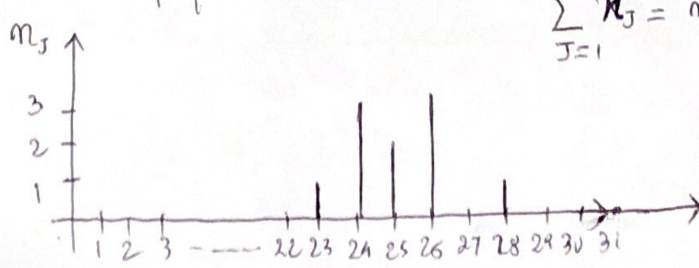
x_J	n_J
1	0
2	0
3	0
⋮	⋮
23	1
24	3
25	2
26	3
27	0
28	1
29	0
30	0
31	0

insieme dei valori possibili

m

n_J = numero di prove che ha dato un certo risultato in un campione, detto frequenza

$$\sum_{J=1}^{m} n_J = n$$

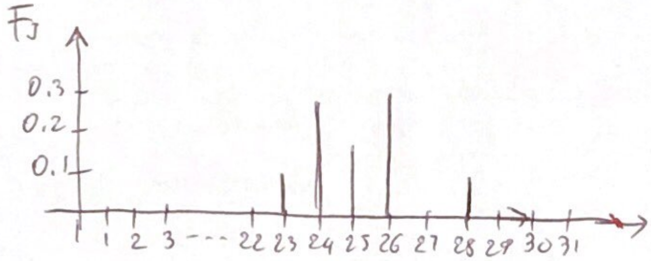


$F_J = \frac{n_J}{n}$ = freq. relativa o normalizzata $J = 1, \dots, m$

$$\sum_{J=1}^{m} F_J = \sum_{J=1}^{m} \frac{n_J}{n} = \frac{1}{n}\sum_{J=1}^{m} n_J = 1$$

$$\boxed{\sum_{J=1}^{m} F_J = 1}$$

è detta condiz. di normalizzazione



istogramma delle freq. relative

Media, varianza e dev. st. campionarie

- $\bar{x}$ = media camp. = $\frac{26+25+\dots+25}{10}$ = ← ris. prove ← n = num. esami

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{J=1}^{n} x_J}$$

x_J = valore J-esima prova

alternativam.

$$\bar{x} = \frac{0\cdot 1 + 0\cdot 2 + \dots + 0\cdot 22 + 1\cdot 23 + 3\cdot 24 + 2\cdot 25 + \dots\ 0\cdot 31}{0+0+\dots+0+1+3+2+3+0+1+\dots\ 0} =$$

$$= \underbrace{\frac{\sum_{J=1}^{m} x_J n_J}{\underbrace{\sum_{J=1}^{m} n_J}_{n}}} = \sum_{J=1}^{m} x_J \overbrace{\frac{n_J}{n}}^{F_J} = \sum_{J=1}^{m} x_J F_J \qquad \boxed{\bar{x} = \sum_{J=1}^{m} x_J F_J}$$

media pesata dei risult. possibili

x_J = J-esimo ris. possibile

- σ_x^2 = var. campionaria = $\boxed{\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{J=1}^{n} (x_J - \bar{x})^2}_{\text{scarto quadratico medio}} = \sigma_x^2}$

$$\sigma_x^2 = \sum_{J=1}^{m} \frac{(x_J - \bar{x})^2 n_J}{\sum_{J=1}^{m} n_J} = \sum_{J=1}^{m} (x_J - \bar{x})^2 F_J$$

• dev. standard

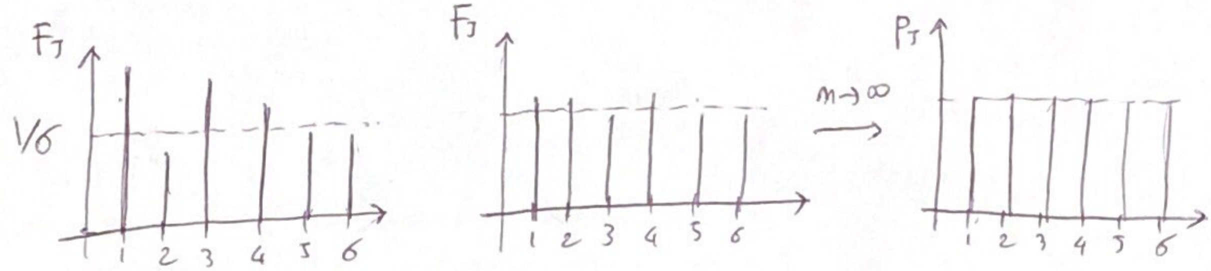
$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

Oss

la media camp. è un indice di posizionam. della v.a., la var. (e la dev. st.) sono indici di dispers. attorno al valore medio

Distribuzione limite

consideriamo un dado regolare e si effettui il lim $n\to\infty$ del numero delle prove



Il limite $n\to\infty$ di ciascuna freq. relativa dà la prob. che la v.a. assuma quel valore

$$\lim_{n\to\infty} F_J = Pr\{X = x_J\} = p_J = 1/6$$

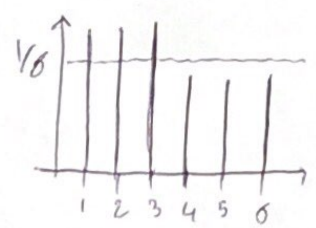
→ se il dado è reg

Oss 1

L'effetto delle flut. è scomparso

Oss 2

dado truccato



Oss 3

La prob. è il rap. fra i casi favorevoli al verif. di una certa situazione sul numero di casi totali

Più in generale

$$Pr\{X\in[a,b]\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{J:\, x_J\in[a,b]} F_J$$