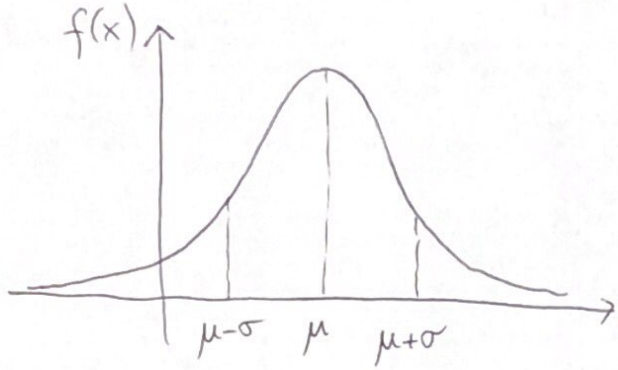
"Curva degli errori"

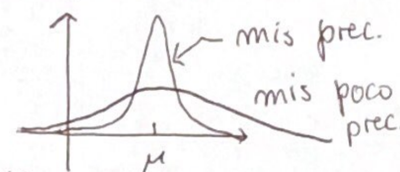
$X = g.f. \Rightarrow$ X è una v.a. di Gauss



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ = valore vero di X

σ = precisione strumentale



verifica della normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx \underset{z=\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz = 1$$

si può dim. che

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx = \mu$$

$$Var\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx = \sigma^2$$

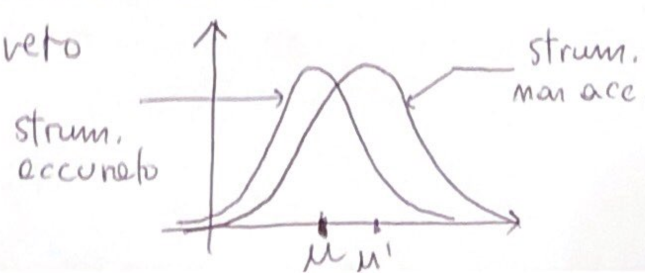
Si def. intervallo di incertezza $(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$

$$Pr\{\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma\} = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-z^2/2}\,dz = 68\,\%$$

se calcolo entro 2σ $Pr = 95\%$

Incertezze sistematiche

Si tratta di misure nelle quali una g.f. viene valutata sempre o in eccesso o in difetto per una medesima quantità. Pertanto la distrib. limite è centrata attorno a $\mu' \neq \mu$ = valore vero



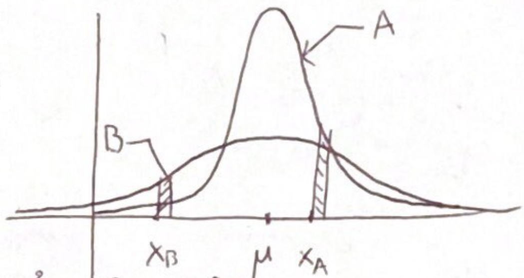
Grandezza fisica misurata con due strumenti accurati e aventi diversa precisione

(2)

$$X \xrightarrow{\text{strum. A}} x_A \pm \sigma_A \qquad X \xrightarrow{\text{strum. B}} x_B \pm \sigma_B$$

- A, B accurati
- σ_A precisione di A, σ_B di B
- σ_A e σ_B precisioni note, non stimate da s_A e s_B

$$\Pr\{X = x_A\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_A} e^{-\frac{(x_A-\mu)^2}{2\sigma_A^2}} dx_A$$



$$\Pr\{X = x_B\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_B} e^{-\frac{(x_B-\mu)^2}{2\sigma_B^2}} dx_B$$

$$\Pr\{X = x_A, X = x_B\} \sim \underbrace{\frac{1}{2\pi\sigma_A\sigma_B} e^{-\left[\frac{(x_A-\mu)^2}{2\sigma_A^2} + \frac{(x_B-\mu)^2}{2\sigma_B^2}\right]}}_{L(\mu') = \frac{1}{2\pi\sigma_A\sigma_B} e^{-\left[\frac{(x_A-\mu')^2}{2\sigma_A^2} + \frac{(x_B-\mu')^2}{2\sigma_B^2}\right]}} dx_A\, dx_B$$

$$0 = \frac{dL}{d\mu'} = \frac{1}{2\pi\sigma_A\sigma_B} e^{-[\ \ ]} \left\{\frac{x_A-\mu'}{\sigma_A^2} + \frac{x_B-\mu'}{\sigma_B^2}\right\}$$

$$\mu'\left(\frac{1}{\sigma_A^2} + \frac{1}{\sigma_B^2}\right) = \frac{x_A}{\sigma_A^2} + \frac{x_B}{\sigma_B^2} \qquad w_A = \frac{1}{\sigma_A^2} \quad w_B = \frac{1}{\sigma_B^2}$$

$$\hat{\mu} = \text{migliore stima di } \mu = \frac{w_A x_A + w_B x_B}{w_A + w_B}$$

È la media pesata di x_A e x_B secondo i pesi $w_A = 1/\sigma_A^2$ e $w_B = 1/\sigma_B^2$, una specie di CM di x_A e x_B con masse proporzionali al quadrato delle precisione

Metodo di massima verosimiglianza

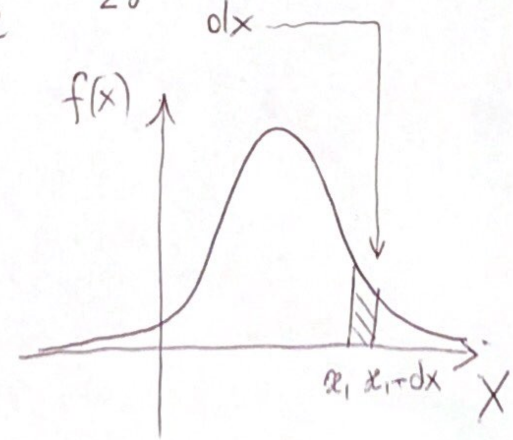
Per ogni GF, X, si desidererebbe conoscere sia il suo valore vero, μ, che la precisione strumentale con la quale essa viene misurata, σ,
Idealmente si potrebbe costruire la distribuzione limite, $f(x)$, e da essa ricavarne il massimo e i flessi. Alternativamente si potrebbe calcolare

$$\bar{x} \xrightarrow{n\to\infty} \mu$$

$$\sigma_x^2 \xrightarrow{n\to\infty} \sigma^2$$

Entrambi i metodi purtroppo coinvolgono il passaggio al limite $n\to\infty$ e questo non è percorribile.
È tuttavia possibile <u>stimare</u> al meglio μ e σ mediante gli stimatori $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}$ basati sulla conoscenza di un campione di misure $(x_1 \dots x_n)$, sfruttando il metodo di massima verosimiglianza.
La probabilità infinitesima di osservare la prima osservazione campionaria x_1 vale

$$Pr\{x_1 < X < x_1 + dx\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Analogamente per la J-esima misura

$$Pr\{x_J < X < x_J + dx\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x_J-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Dunque la probabilità di ottenere il campione in esame vale

$$\Pr\{x_1 < X < x_1+dx,\ x_2 < X < x_2+dx, \dots, x_J < X < x_J+dx\} =$$

$$= \prod_{J=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} e^{-\frac{(x_J-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} e^{-\sum_{J=1}^{n}\frac{(x_J-\mu)^2}{2\sigma^2}}}_{L(x_1 \dots x_n, \mu, \sigma) = \text{ funzione di verosimiglianza}} (dx)^n$$

$x_1 \dots x_n$ = noti, μ e σ incognite

Oss

Si considerino le quantità ignote μ e σ come delle variabili, μ' e σ'. La verosimiglianza L è funzione di μ' e σ' ed è proporzionale alla probabilità di ottenere il campione. Si assume che le stime μ' e σ' siano le più verosimili quando L è massimizzata. Tali stime sono dette di massima verosimiglianza.

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial L}{\partial \mu'} \\ 0 = \dfrac{\partial L}{\partial \sigma'} \end{cases} \Rightarrow 0 = \frac{\partial L}{\partial \mu'} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\sigma'^n} e^{-\sum_{J=1}^{n}\frac{(x_J-\mu)^2}{2\sigma^2}} (-2)\sum_{J=1}^{n}\frac{(x_J-\mu')}{2\sigma'^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{J=1}^{n}(x_J-\mu') = 0 \qquad \sum_{J=1}^{n} x_J = n\mu'$$

Il risultato è la migliore stima

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{J=1}^{n} x_J = \bar{X}$$ che è la media campionaria

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \sigma'} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left[\frac{-n}{\sigma'^{n+1}} e^{-\sum_{j=1}^{n}\frac{(x_j-\mu')^2}{2\sigma'^2}} + \frac{1}{\sigma'^n} e^{-\sum_{j=1}^{n}\frac{(x_j-\mu')^2}{2\sigma'^2}} (-2)\sum_{j=1}^{n}\frac{(x_j-\mu')}{2\sigma'^3}\right.$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}'^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu')^2 = \sigma_x^2$$

Riassumendo, le migliori stime sono:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \hat{\mu} = \bar{x} & \text{migliore stima di } \mu \\ \hat{\sigma}^2 = \sigma_x^2 & \text{'' '' '' } \sigma^2 \end{array}}$$

Oss

Pertanto, da un campione $(x_1 - x_n)$ di una GF X si costruisce l'intervallo di incertezza come

$$X = \bar{x} \pm \sigma_x$$

$\bar{x}$ ↓ migliore stima del valore vero

σ_x → migliore stima dell'incertezza