Propagazione delle incertezze

Una GF, X, sia misurata direttamente: la migliore stima del valore vero μ è data dalla media campionaria, $\bar{x}$, mentre la migliore stima dell'incertezza strumentale è data dalla deviaz. standard campionaria σ_x. L'intervallo di incertezza è dato da:

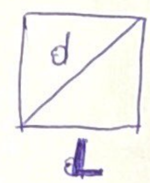
$$X = \bar{x} \pm \sigma_x$$

Grandezze fisiche misurate indirettamente

Esistono delle GF che vengono misurate indirettamente, ovvero sono calcolate da altre per mezzo di una formula

Es

La diagonale di una stanza quadrata può essere misurata direttamente oppure mediante la misura diretta del lato e calcolo della diagonale



$$d = \sqrt{2}\, L$$

mediante misure indirette

Per queste GF è possibile determinare l'intervallo di incertezza, noto che siano gli intervalli di incertezza delle GF che concorrono al calcolo

Prima di arrivare al caso generale, vediamo alcuni casi particolari

Somma

$X = \underbrace{x_m \pm \delta x}_{\text{intervallo di incertezza di } X}$ → migliore stima dell'incertezza su X

x_m → migliore stima del valore vero di X

$Y = y_m \pm \delta y$ → migliore stima dell'incertezza su Y

y_m → migliore stima del valore vero di Y

$Q = X + Y$

Quanto vale l'intervallo di incertezza di Q?

$Q = q_m \pm \delta q$

$Q = X + Y = (x_m \pm \delta x) + (y_m \pm \delta y) = (x_m + y_m) \pm \delta x \pm \delta y$

$\leq \underbrace{(x_m + y_m)}_{\text{migliore stima di } Q} \pm \underbrace{(\delta x + \delta y)}_{\text{migliore stima dell'incertezza di } Q \text{ stando prudenti}}$

$Q = q_m \pm \delta q$ $\quad \boxed{\begin{aligned} q_m &= x_m + y_m \\ \delta q &= \delta x + \delta y \end{aligned}}$

Oss

I valori delle incertezze δx e δy possono essere qualsiasi

Differenza

$$Q = X - Y$$

$$Q = (x_m \pm \delta x) - (y_m \pm \delta y) = (x_m - y_m) \pm \delta x \mp \delta y \leq$$

$$\leq \underbrace{(x_m - y_m)}_{\text{migliore stima di } Q} \pm \underbrace{(\delta x + \delta y)}_{\text{migliore stima dell'incertezza di } Q \text{ stando prudenti}}$$

$$Q = X - Y \qquad \boxed{\begin{aligned} q_m &= x_m - y_m \\ \delta q &= \delta x + \delta y \end{aligned}}$$

Incertezza relativa

$$X = x_m \pm \delta x$$

Si dice incertezza relativa $\frac{\delta x}{|x_m|}$; tale quantità adimensionale è sempre positiva. Talvolta δx è detta incertezza assoluta. L'intervallo di incertezza può essere pertanto scritto come:

$$\boxed{X = x_m \left(1 \pm \frac{\delta x}{|x_m|}\right)}$$

Prodotto

È necessario ridursi al caso di GF aventi una piccola incertezza relativa, che comunque è il caso più frequente

$$X = x_m\left(1 \pm \frac{\delta x}{|x_m|}\right) \qquad \frac{\delta x}{|x_m|} \ll 1 \qquad Q = X \cdot Y$$

$$Y = y_m\left(1 \pm \frac{\delta y}{|y_m|}\right) \qquad \frac{\delta y}{|y_m|} \ll 1$$

Quanto vale l'intervallo di incertezza sul prodotto?

$$Q = q_m\left(1 \pm \frac{\delta q}{|q_m|}\right)$$

$$Q = XY = x_m\left(1 \pm \frac{\delta x}{|x_m|}\right)\left(1 \pm \frac{\delta y}{|y_m|}\right)y_m =$$

$$= x_m y_m \left[1 \pm \frac{\delta x}{|x_m|} \pm \frac{\delta y}{|y_m|} \pm \underbrace{\frac{\delta x}{|x_m|}\frac{\delta y}{|y_m|}}_{\text{quantità trascurabile}}\right] \leq$$

$$\leq \underbrace{x_m y_m}_{q_m}\left[1 \pm \underbrace{\left(\frac{\delta x}{|x_m|} + \frac{\delta y}{|y_m|}\right)}_{\frac{\delta q}{|q_m|}}\right] \leftarrow \text{stima prudente}$$

$$Q = XY \qquad \boxed{\begin{aligned} q_m &= x_m y_m \\ \frac{\delta q}{|q_m|} &= \frac{\delta x}{|x_m|} + \frac{\delta y}{|y_m|} \end{aligned}}$$

Oss

Tali formule valgono solamente in regime di piccole incertezze relative, in quanto è una teoria sviluppata al primo ordine nelle incertezze relative.

Divisione

$$Q = \frac{X}{Y}$$

$$Q = \frac{x_m\left(1 \pm \frac{\delta x}{|x_m|}\right)}{y_m\left(1 \pm \frac{\delta y}{|y_m|}\right)} = \frac{x_m}{y_m}\left(1 \pm \frac{\delta x}{|x_m|}\right)\left(1 \mp \frac{\delta y}{|y_m|}\right)$$

polinomio di Taylor al primo ordine di $\frac{1}{\left(1 \pm \frac{\delta y}{|y_m|}\right)}$

$$\frac{1}{1-z} = \underbrace{1 + z}_{\text{I ordine}} + z^2 + \dots$$

$$Q = \frac{x_m}{y_m}\left[1 \pm \frac{\delta x}{|x_m|} \mp \frac{\delta y}{|y_m|} \pm \underbrace{\frac{\delta x}{|x_m|}\frac{\delta y}{|y_m|}}_{\text{quantità trascurabile in quanto del secondo ordine}}\right] \leq$$

$$\leq \underbrace{\frac{x_m}{y_m}}_{q_m}\left[1 \pm \underbrace{\left(\frac{\delta x}{|x_m|} + \frac{\delta y}{|y_m|}\right)}_{\frac{\delta q}{|q_m|}}\right]$$

$$Q = \frac{X}{Y} -$$

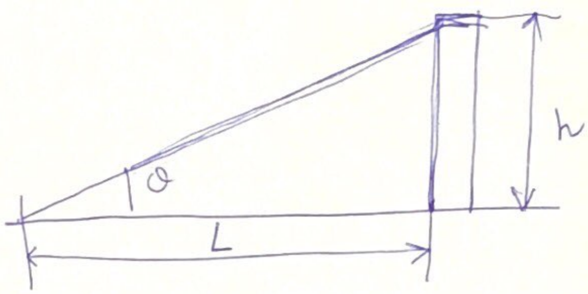
$$\boxed{\begin{gathered} q_m = \frac{x_m}{y_m} \\ \frac{\delta q}{|q_m|} = \frac{\delta x}{|x_m|} + \frac{\delta y}{|y_m|} \end{gathered}}$$

Grandezze fisiche indipendenti

Se le GF che intervengono nella propagazione delle incertezze sono indipendenti, ossia tali che il modo di determinazione di X non alteri il modo di determinazione di Y è possibile proporre una formulazione dell'intervallo di incertezza di Q in maniera meno prudente.

Es 1

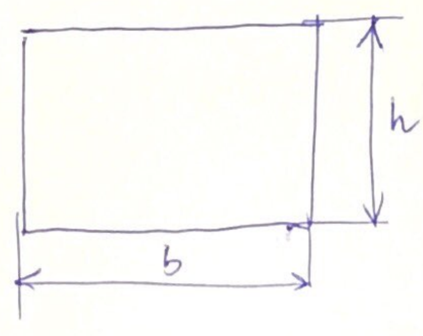
$$h = L \, tg\, \theta$$



L e θ sono misurati con due strumenti diversi dunque sono indipendenti

Es 2

Anche se misuro b e h con lo stesso strumento le misurazioni sono indip. e tali anche le grandezze



Oss

Nell'esempio 2, in presenza di incertezze sistematiche se b è valutata in eccesso anche h lo è.
Le incertezze sistematiche sono misurazioni sempre in eccesso o in difetto rispetto al valore vero. In tale circostanza le GF b e h non possono considerarsi indipendenti. Negli esercizi si vedranno casi di dipendenza anche in assenza di incertezze sistematiche.

Somma in quadratura

Nel caso di GF indipendenti si ha:

⊕ $Q = X + Y$

$$q_m = x_m + y_m$$

$$\delta q = \underbrace{\left[(\delta x)^2 + (\delta y)^2 \right]^{1/2}}_{\text{somma in quadratura incertezze assolute}} \leq \delta x + \delta y$$

⊖ $Q = X - Y$

$$q_m = x_m - y_m$$

$$\delta q = \left[(\delta x)^2 + (\delta y)^2 \right]^{1/2}$$

$$\boxed{\delta q = \left[(\delta x)^2 + (\delta y)^2 \right]^{1/2}}$$

⊗ $Q = XY$

$$q_m = x_m y_m$$

$$\frac{\delta q}{|q_m|} = \underbrace{\left[\left(\frac{\delta x}{|x_m|} \right)^2 + \left(\frac{\delta y}{|y_m|} \right)^2 \right]^{1/2}}_{\text{somma in quadratura incertezze relative}}$$

⊘ $Q = \frac{X}{Y}$

$$q_m = \frac{x_m}{y_m}$$

$$\frac{\delta q}{|q_m|} = \left[\left(\frac{\delta x}{|x_m|} \right)^2 + \left(\frac{\delta y}{|y_m|} \right)^2 \right]$$

$$\boxed{\frac{\delta q}{|q_m|} = \left[\left(\frac{\delta x}{|x_m|} \right)^2 + \left(\frac{\delta y}{|y_m|} \right)^2 \right]^{1/2}}$$