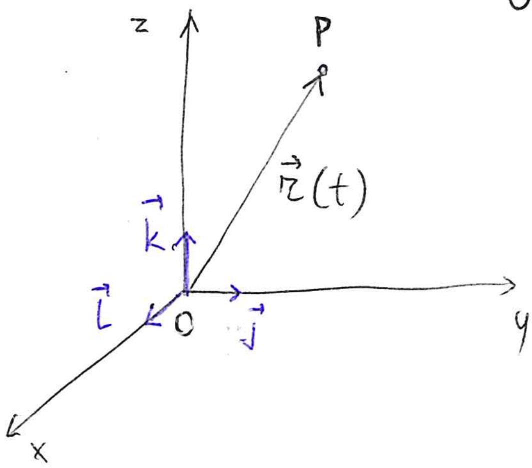
Cinematica vettoriale

Vettore posizione $\vec{r}(t)$



$\overrightarrow{OP}(t) = \vec{r}(t)$ = identifica la posizione del punto materiale

$$\vec{r}(t) = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k} =$$
$$= x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

Oss 1

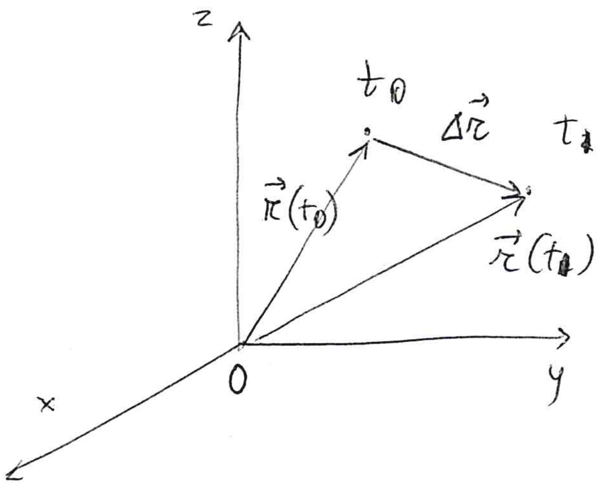
E' come se avvenissero 3 moti 1-D indipendenti sugli assi

Vettore spostamento $\Delta\vec{r}(t_0, t_1)$

Oss 2

Ipotesi di continuità del moto

$x, y, z(t)$ = funz. continue



$$\Delta\vec{r}(t_0, t_1) = \vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0) =$$
$$= (x(t_1) - x(t_0))\,\vec{i} + (y(t_1) - y(t_0))\,\vec{j}$$
$$+ (z(t_1) - z(t_0))\,\vec{k}$$

Velocità vettoriale media $\vec{v}_m(t_0, t_1)$

$$\vec{v}_m(t_0, t_1) = \frac{\Delta\vec{r}(t_0, t_1)}{\Delta t} = \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}\,\vec{i} + \frac{y(t_1) - y(t_0)}{t_1 - t_0}\,\vec{j}$$
$$+ \frac{z(t_1) - z(t_0)}{t_1 - t_0}\,\vec{k} =$$
$$= \frac{\Delta x}{\Delta t}\,\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\,\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\,\vec{k}$$

Moto uniforme nello spazio

È un moto a velocità vettoriale media costante (2)

$$\vec{v}_m(t_0,t_1) = \frac{\vec{r}(t_1)-\vec{r}(t_0)}{t_1-t_0} = \vec{v} = \text{costante} \quad \forall\, t_0, t_1$$

$\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_1 - t_0)$ essendo t_1 generico si ha

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t-t_0)$$

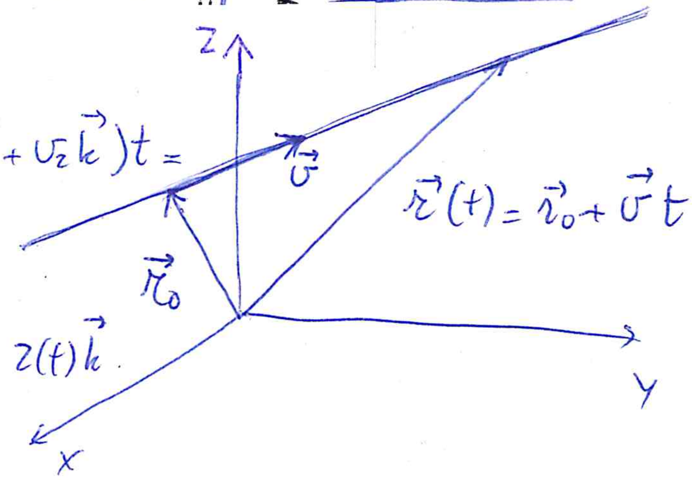
È sempre possibile fissare $t_0 = 0\,s$

$$\boxed{\vec{r}(t) = \underbrace{\vec{r}(0)}_{\vec{r}_0} + \vec{v}\,t} \leftarrow \text{legge oraria}$$

Oss 1

- Il moto uniforme nello spazio è sempre rettilineo

Oss2



$$\vec{r}(t) = (x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}) + (v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k})t =$$

$$= (x_0 + v_x t)\vec{i} + (y_0 + v_y t)\vec{j} +$$

$$+ (z_0 + v_z t)\vec{k} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_x t \\ y(t) &= y_0 + v_y t \\ z(t) &= z_0 + v_z t \end{aligned}}$$

moto rettilineo ret. se e solo se ho MRU lungo tutti e tre gli assi coordinati

Oss 3

definizione alternativa del MU

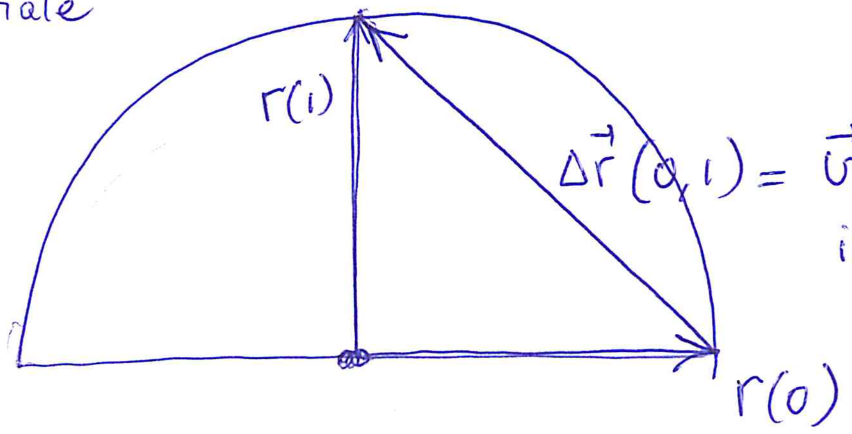
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \text{cost.}$$

$$\int_{0}^{t} \vec{v}(t')\,dt' = \int_0^t \frac{d\vec{r}}{dt'}\,dt' = \vec{r}(t) - \vec{r}(0) \Rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}\,t}$$

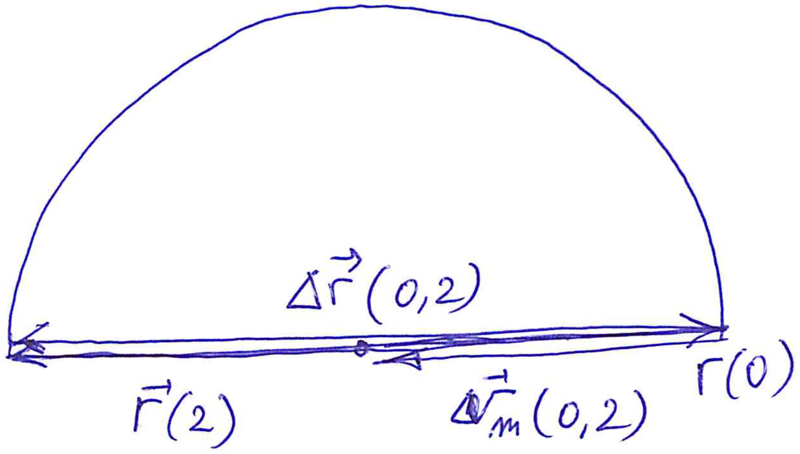
$$= \vec{v}\,t$$

Oss 4

Il MCU è uniforme solo in senso scalare ma non in senso vettoriale



$\Delta \vec{r}(0,1) = \vec{v}_m(0,1)$ in quanto $\Delta t = 1s$



$$\vec{v}_m(0,2) = \frac{\Delta \vec{r}(0,2)}{\underbrace{\Delta t}_{2}} = \frac{\Delta \vec{r}(0,2)}{2}$$

$$\vec{v}_m(0,1) \neq \vec{v}_m(0,2)$$

$$\Downarrow$$

non è uniforme in senso vettoriale

Limite, derivata e integrale di una funzione vettoriale

(4)

- $\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$
- $\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \lim_{t \to t_0} x(t)\,\vec{i} + \lim_{t \to t_0} y(t)\,\vec{j} + \lim_{t \to t_0} z(t)\,\vec{k}$
- $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\vec{i} + \frac{dy}{dt}\,\vec{j} + \frac{dz}{dt}\,\vec{k}$
- $\int_{t_1}^{t_2} \vec{r}(t)\,dt = \left(\int_{t_1}^{t_2} x(t)\,dt\right)\vec{i} + \left(\int_{t_1}^{t_2} y(t)\,dt\right)\vec{j} + \left(\int_{t_1}^{t_2} z(t)\,dt\right)\vec{k}$

Velocità vettoriale

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\,\vec{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}\,\vec{j} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}\,\vec{k} =$$

$$= \frac{dx}{dt}\,\vec{i} + \frac{dy}{dt}\,\vec{j} + \frac{dz}{dt}\,\vec{k} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

Accelerazione vettoriale media

$$\vec{a}_m(t_1, t_0) = \frac{\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Accelerazione vettoriale

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}$$

Moto uniformemente accelerato nello spazio

È un moto che avviene con $\vec{a}_m(t,t_0) = \underset{=\text{cost.}}{\vec{a}} \quad \forall\, t, t_0$ oppure

$\vec{a}(t) = \vec{a} = \text{cost.} \quad \forall t$

Scegliamo il II metodo:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \text{cost.} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \qquad a_x, a_y, a_z = \text{cost.}$$

$$= \int_0^t \vec{a}(t')\,dt' = \int_0^t \frac{d\vec{v}}{dt'}\,dt' = \vec{v}(t) - \underbrace{\vec{v}(0)}_{\vec{v}_0}$$

$$= \vec{a}\int_0^t dt' = \vec{a}\,t$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t}$$

Vediamo l'espressione della velocità nei 3 moti compon.

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\vec{i} + v_y(t)\,\vec{j} + v_z(t)\,\vec{k} = v_{0x}\,\vec{i} + v_{0y}\,\vec{j} + v_{0z}\,\vec{k} + a_x t\,\vec{i} + a_y t\,\vec{j} + a_z t\,\vec{k}$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_x(t) &= v_{0x} + a_x t \\ v_y(t) &= v_{0y} + a_y t \\ v_z(t) &= v_{0z} + a_z t \end{aligned}}$$

Calcoliamo ora la legge oraria:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= \int_0^t \vec{v}(t')\,dt' = \int_0^t \frac{d\vec{r}}{dt'}\,dt' = \vec{r}(t) - \underbrace{\vec{r}(0)}_{\vec{r}_0}$$

$$= \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{a}\,t')\,dt' = \vec{v}_0 t + \vec{a}\,\frac{t^2}{2}$$

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2}$$

<u>Oss 1</u>

il moto è univocamente descritto quando sono note $\vec{r}_0, \vec{v}_0,$

<u>Oss 2</u>

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y(t) &= y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2} a_y t^2 \\ z(t) &= z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2} a_z t^2 \end{aligned}}$$

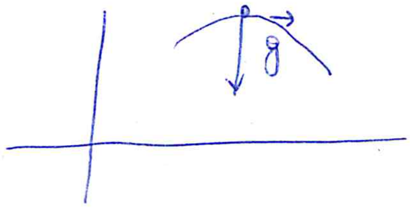
6

un moto è unif. accelerato se e solo se i moti componenti lungo i 3 assi sono tutti e 3 accelerati unif.

<u>Es</u>

Il moto di caduta dei gravi è un MUA in quanto av[viene] con acc. vet. costante, $\vec{g}$

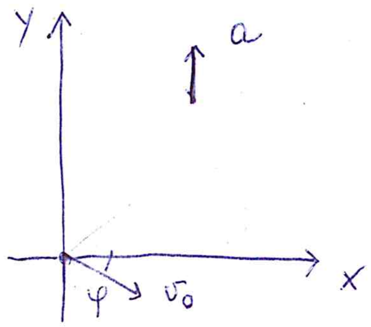
Il modulo di $\vec{g}$, $|\vec{g}| = 9.806 \ m/s^2$



<u>Oss 3</u>

La legge oraria $x(t), y(t), z(t)$ è tale che la <u>traiettoria</u> ossia il luogo geometrico dei punti occupato nel suo mo[to] dal punto materiale, ~~sia~~ è una parabola, eventualmente degenere in una semiretta.

Posso infatti sempre scegliere:



$$x(t) = \cancel{x_0} + v_{0x}t + \cancel{\frac{1}{2} a_x t^2} = v_0 \cos\varphi \, t$$

$$y(t) = \cancel{y_0} + v_{0y}t + \frac{1}{2} a_y t^2 = v_0 \sin\varphi \, t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\varphi}$$

$$\boxed{y = \frac{v_0 \sin\varphi}{v_0 \cos\varphi} x + \frac{1}{2} a \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\varphi}} \quad \boxed{\text{che è una parabola}}$$