Primo parziale di Geometria e Algebra (Meccanica) 6-11-2015-B

1) Siano:

$$W_1 = \left\{ ax^2 + bx + c \ : \ \begin{cases} 3a + b - 6c = 0 \\ 3a + kb - 6c = 0 \end{cases} \right\} \sqsubset P_2(x)$$

e

$$W_2 = \{(-x - y + 6z, -3x + \alpha y + 2z, 2x - y) \ : \ x, y, z \in \mathbf{R}\} \sqsubset \mathbf{R}^3 \ .$$

a) Al variare di $k \in \mathbf{R}$ trovare una base e la dimensione di W_1.
b) Al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ trovare una base e la dimensione di W_2.
c) Discutere l'appartenenza di $\mathbf{v} = (4, 0, \beta)$ a W_2 ($\beta \in \mathbf{R}$).

2) a) Discutere i seguenti sistemi lineari

$$i) \ \begin{cases} 6x - y + 6z = \beta \\ -2x - 3y + \alpha z = 0 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \qquad ii) \ \begin{cases} 6x - y + 6z + \beta t = 0 \\ -2x - 3y + \alpha z = 0 \\ 3x + 2y + t = 0 \end{cases} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$$

b) Interpretare geometricamente il sistema i).

3) Trovare:
a) le equazioni ridotte della retta t passante per $P(1, 2, 3)$, perpendicolare alla retta $r \equiv \begin{cases} x = z + 8 \\ y = 2z - 5 \end{cases}$ e parallela al piano $\pi \equiv x + 2y + 3z - 5 = 0$,
b) $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ in modo che la distanza minima tra le rette $r_1 \equiv \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = 3z - 4 \end{cases}$ e $r_2 \equiv \begin{cases} x = 4z + \alpha \\ y = 3z + \beta \end{cases}$ sia maggiore di $2\sqrt{10}$,
c) le equazioni dei piani paralleli a $\pi_1 \equiv 6x - 2y + 3z + 6 = 0$ e che intersecano la sfera $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 22 = 0$ in una circonferenza di raggio uguale a 4.

4) Determinare $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ in modo che

$$A = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

sia una matrice ortogonale.

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente motivati.

__Soluzione__. **1)** a) Risolviamo il sistema. Sottraendo membro a membro le due equazioni otteniamo

$$\begin{cases} (1-k)b = 0 \\ 3a + b - 6c = 0 \end{cases} .$$

Quindi se $k \neq 1$

$$\begin{cases} b = 0 \\ a = 2c \end{cases}$$

e $W_1 = \{2cx^2 + c \ : \ c \in \mathbf{R}\} = \{c(2x^2+1) \ : \ c \in \mathbf{R}\}$. Pertanto $\{2x^2+1\}$ è una base di W_1 e $\dim W_1 = 1$.
Se $k = 1$

$$\begin{cases} 0b = 0 \\ b = -3a + 6c \end{cases}$$

e $W_1 = \{ax^2 + (-3a+6c)x + c \ : \ a, c \in \mathbf{R}\} = \{a(x^2 - 3x) + c(6x+1) \ : \ a, c \in \mathbf{R}\}$. Pertanto $\{x^2 - 3x, 6x + 1\}$ è una base di W_1 e $\dim W_1 = 2$.
b) $W_2 = \{x(-1,-3,2) + y(-1,\alpha,-1) + z(6,2,0) \ : \ x, y, z \in \mathbf{R}\}$ e
$S = \{(-1,-3,2), (-1,\alpha,-1), (6,2,0)\}$ genera W_2. Poichè

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -12\alpha + 12$$

risulta che se $\alpha \neq 1$ allora $|A| \neq 0$, $\dim W_2 = 3$ e S è una base di W_2.
Se $\alpha = 1$ $\dim W_2 = 2$ (chiaramente A possiede un minore di ordine due con determinante non nullo, ad esempio quello formato dalla prima e terza riga e dalla seconda e terza colonna) e $S' = \{(-1,-3,2), (6,2,0)\}$ è una base di W_2.
c) Se $\alpha \neq 1$ abbiamo visto che $\dim W_2 = 3$ e quindi $W_2 = \mathbf{R}^3$. Perciò $\mathbf{v} \in W_2$ per ogni $\beta \in \mathbf{R}$.
Se $\alpha = 1$ il vettore $\mathbf{v} = (4, 0, \beta)$ appartiene a W_2 se e soltanto se il rango della matrice $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ è due, ossia se il suo determinante è nullo. Con un semplice calcolo si trova che tale determinante è $16\beta - 16$ e quindi $\mathbf{v} \in W_2$ se e soltanto se $\beta = 1$.

2) a) Calcoliamo anzitutto il determinante della matrice incompleta A del sistema (che è una matrice quadrata 3×3):

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 6 \\ -2 & -3 & \alpha \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -15\alpha + 30 .$$

Quindi se $\alpha \neq 2$ il sistema è di Cramer e ha quindi un'unica soluzione, qualunque sia il valore di β.

Supponiamo allora $\alpha = 2$ e consideriamo la matrice completa del sistema $A : B$. Risulta

$$A : B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 6 & \beta \\ -2 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo il determinante dei minori orlati di ordine tre del minore di ordine due formato dalle prima e terza riga e dalle prime due colonne, minore che ha determinante uguale a 15. Il primo di questi minori è proprio A che ha determinante, come sappiamo, nullo, mentre il secondo è

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & \beta \\ -2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha determinante $5\beta - 20$. Quindi se $\beta \neq 4$ si ha $r(A : B) = 3 \neq 2 = r(A)$ e quindi per il teorema di Rouchè-Capelli il sistema non ha soluzioni.
Se invece $\beta = 4$ si ha $r(A : B) = r(A) = 2$ e, sempre per il teorema di Rouchè-Capelli il sistema ha $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.
b) Il sistema è omogeneo e la sua matrice incompleta $\overline{A}$ (l'unica che è necessario considerare) coincide con la matrice completa del sistema a). Quindi:
se $\alpha \neq 2$ o $\beta \neq 4$ è $r(\overline{A}) = 3$ e il sistema ha $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni,
se $\alpha = 2$ e $\beta = 4$ è $r(\overline{A}) = 2$ e il sistema ha $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni.

3) a) La generica retta per P ha equazione

$$t \equiv \frac{x-1}{\ell} = \frac{y-2}{m} = \frac{z-3}{n} \ .$$

La condizione di parallelismo con π $(a\ell + bm + cn = 0)$ porta all'equazione $\ell + 2m + 3n = 0$, mentre la condizione di perpendicolarità con r $(\ell\ell_1 + mm_1 + nn_1 = 0)$ di parametri direttori $1, 2, 1$ porta all'equazione $\ell + 2m + n = 0$. Il sistema delle due equazioni fornisce $n = 0$ e $\ell = -2m$ e quindi

$$t \equiv \begin{cases} x = -2y + 5 \\ z = 3 \end{cases} \ .$$

b) I parametri direttori di r_1 e r_2 sono rispettivamente $2, 3, 1$ e $4, 3, 1$ e, non essendo proporzionali, possiamo dire che r_1 e r_2 non sono parallele.
Determiniamo adesso il piano π contenente r_1 e parallelo a r_2. Preso un generico punto P di r_2 sarà $\mathrm{d}(r_1, r_2) = \mathrm{d}(P, \pi)$.
Il fascio di piani di asse r_1 ha equazione

$$\pi \equiv x - 2z + 1 + \lambda(y - 3z + 4) = 0 \quad \text{ossia} \quad \pi \equiv x + \lambda y + (-2 - 3\lambda)z + 1 + 4\lambda = 0 \ .$$

Risulta $\pi \parallel r_2 \iff 4 + 3\lambda - 2 - 3\lambda = 0 \iff 0\lambda = -2$ che è impossibile e quindi $\pi \equiv y - 3z + 4 = 0$.

Come punto di r_2 prendiamo $P(\alpha, \beta, 0)$. Risulta allora

$$\mathrm{d}(r_1, r_2) = \mathrm{d}(P, \pi) = \frac{|\beta + 4|}{\sqrt{10}}$$

e

$$\frac{|\beta + 4|}{\sqrt{10}} > 2\sqrt{10} \iff |\beta + 4| > 20 \iff \beta < -24 \text{ oppure } \beta > 16\ .$$

c) Il centro C_S della sfera è il punto $C_S(1, -1, 1)$ mentre il raggio della sfera è dato da $r_S = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 4 + 4 + 88}$ e quindi $r_S = 5$. Ne segue che $d(C_S, C_C) = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.
I piani da determinare sono allora i piani $\pi_2 \parallel \pi_1$ tali che $d(C_S, \pi_2) = 3$. Poichè
$\pi_2 \equiv 6x - 2y + 3z + \alpha = 0$ deve quindi essere

$$\frac{|6 + 2 + 3 + \alpha|}{\sqrt{36 + 4 + 9}} = 3 \text{ ossia } |11 + \alpha| = 21 \text{ da cui } \alpha_1 = 10 \text{ e } \alpha_2 = -32\ .$$

I piani cercati hanno allora equazione

$$\pi_2' \equiv 6x - 2y + 3z + 10 = 0 \text{ e } \pi_2'' \equiv 6x - 2y + 3z - 32 = 0\ .$$

4) A è ortogonale se e soltanto se $AA_{-1} = I_2$ ossia

$$\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & \alpha \\ 1/\sqrt{5} & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Eseguendo i calcoli si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & (2\alpha + \beta)/\sqrt{5} \\ (2\alpha + \beta)/\sqrt{5} & \alpha^2 + \beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{2\alpha + \beta}{\sqrt{5}} = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -2\alpha \\ \alpha^2 + 4\alpha^2 = 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \beta = -2\alpha \\ 5\alpha^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = \mp 2/\sqrt{5} \\ \alpha = \pm 1/\sqrt{5} \end{cases}$$

In conclusione

$$\alpha_1 = 1/\sqrt{5} \text{ e } \beta_1 = -2/\sqrt{5} \quad \text{oppure} \quad \alpha_2 = -1/\sqrt{5} \text{ e } \beta_2 = 2/\sqrt{5}\ .$$