Primo parziale di Geometria e Algebra
(Ing. Elettronica e dell'informazione) 02-11-2016-A

1) Trovare una base e la dimensione di:

$$W = \{(a,b,c) \in \mathbf{R^3} \ : \ \begin{cases} 3b - c = 0 \\ a - 5b + c = 0 \\ a + kb - c = 0 \end{cases} \} \sqsubset \mathbf{R}^3 \quad (k \in \mathbf{R}).$$

2) Sia

$$W = \{(x - 2y - 3z, 3x - 2y, x + \alpha y + 6z) \ : \ x, y, z \in \mathbf{R}\} \sqsubset \mathbf{R}^3 \ , \ \alpha \in \mathbf{R} \ .$$

a) Trovare una base e la dimensione di W.
b) Discutere l'appartenenza di $\mathbf{v} = (\beta, 2, 2)$ a W.

3) Discutere i seguenti sistemi lineari $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$

$$\text{a)} \ \begin{cases} \alpha x + y + 2z = 2 \\ 3y - 2z = \beta \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \text{b)} \ \begin{cases} \alpha x + y + 2z + 2t = 0 \\ 3y - 2z + \beta t = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases} \ .$$

4) Determinare:
a) le equazioni ridotte della retta t passante per $P(1,2,3)$ e perpendicolare sia alla retta $r \equiv \begin{cases} x = z + 4 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$ che alla retta $s \equiv \begin{cases} y = 2x - 5 \\ z = 3x + 7 \end{cases}$,
b) gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ in modo che la minima distanza tra le rette

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 3z + 2 \\ y = z - 5 \end{cases} \quad , \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = 3z + \alpha \\ y = 2z + \beta \end{cases}$$

sia maggiore di $2\sqrt{10}$,
c) le equazioni delle (eventuali) sfere S aventi il centro sulla retta $t \equiv \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$ e tangenti i piani $\pi \equiv 2x - 3y + 6z - 10 = 0$ e $\pi_1 \equiv 2x - 3y + 6z = 0$.

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente giustificati.
Gli esercizi 2 e 3 vanno risolti usando le matrici.

Primo parziale di Geometria e Algebra (Ingegneria Meccanica) 02-11-2016-A

1) Sia

$$W = \{(\alpha x - y + 3z, x - 2y + 2z, x + 4y) \ : \ x, y, z \in \mathbf{R}\} \sqsubset \mathbf{R}^3 \quad , \ \alpha \in \mathbf{R} \ .$$

a) Trovare una base e la dimensione di W.
b) Discutere l'appartenenza di $\mathbf{v} = (\beta, 0, 4)$ a W.

2 Trovare una base e la dimensione di

$$W = \{(a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \begin{cases} a - 2b + 3c = 0 \\ ka - 2b + 3c = 0 \end{cases} \} \sqsubset \mathbf{R}^3 \ , \ k \in \mathbf{R}.$$

3) Discutere i seguenti sistemi lineari ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$)

a) $\begin{cases} 2x - y + 3z - 2t = \beta \\ \alpha x - 2y + 2z = 1 \\ x + 4y - 4t = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y + 3z - 2t = 0 \\ \alpha x - 2y + 2z = 0 \\ x + 4y - 4t = 0 \end{cases}$

4) Trovare:

a) le equazioni ridotte della retta t passante per il punto $P(2, 3, 1)$, perpendicolare alla retta $r \equiv \begin{cases} x = 3z - 1 \\ y = 2z + 4 \end{cases}$ e parallela al piano $\pi \equiv 3x - y + z + 5 = 0$,

b) gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ in modo che la minima distanza tra le rette

$$s \equiv \begin{cases} x = 2z + 3 \\ y = 4z - 1 \end{cases} \quad , \quad s_1 \equiv \begin{cases} x = 2z + \alpha \\ y = z + \beta \end{cases}$$

sia minore di $2\sqrt{5}$,

c) l'equazione della sfera tangente il piano $\pi_1 \equiv 2x - y + 3z - 4 = 0$ nel punto $P(1, 1, 1)$ ed avente il centro sul piano xz.

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente giustificati.
Gli esercizi 1 e 3 vanno risolti usando le matrici.