Secondo parziale di Geometria (Ing. Meccanica) 22-12-2009-A

1) Determinare:

a) gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali la minima distanza tra le rette

$$r \equiv \begin{cases} x = 4z + 16 \\ y = 2z - 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad s \equiv \begin{cases} x = 4z + \alpha \\ y = z - 4 \end{cases}$$

sia uguale a $\sqrt{17}$;

b) l'equazione del cono che proietta l'ellisse $\mathcal{C} \equiv 9x^2 + 4y^2 - 1 = 0$ del piano xy dal punto $V = (0, 0, -2)$,

c) le coordinate dei vertici di $\mathcal{C}$ (punto b)).

2) Sia T il tensore in $\mathbf{R}^3$ per il quale

$$T((1,0,0)) = (3,0,0), T((0,1,0)) = (-1,-1,0), T((0,0,1)) = (2,\alpha,3).$$

Trovare:

a) $T((x,y,z))$,

b) la matrice A associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$,

c) gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali la matrice A di b) è diagonalizzabile.

3) Sia $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica).

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.

b) Determinare la decomposizione spettrale del tensore T associato ad A rispetto alla base canonica.

c) Trovare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali $< T, \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} >= 19$, con $\mathbf{w} = (\alpha, 1, 1)$.

Facoltativo. Dimostrare che un tensore T in uno s.e.r V è una funzione iniettiva $\iff$ $\mathbf{0}$ è l'unico elemento di V per il quale $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Secondo parziale di Geometria (Ing. Meccanica) 22-12-2009-B

1) Determinare:

a) gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali la minima distanza tra le rette

$$r \equiv \begin{cases} x = 3z - 9 \\ y = z + 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad s \equiv \begin{cases} x = 3z + \alpha \\ y = 2z - 1 \end{cases}$$

sia uguale a $\sqrt{10}$;

b) l'equazione del cono che proietta l'ellisse $\mathcal{C} \equiv 4x^2 + 9y^2 - 1 = 0$ del piano xy dal punto $V = (0, 0, 2)$,

c) le coordinate dei vertici di $\mathcal{C}$ (punto b)).

2) Sia T il tensore in $\mathbf{R}^3$ per il quale

$$T((1,0,0)) = (3,0,0), T((0,1,0)) = (\alpha, -1, 0), T((0,0,1)) = (2,8,3).$$

Trovare:

a) $T((x, y, z))$,

b) la matrice A associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$,

c) gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali la matrice A di b) è diagonalizzabile.

3) Sia $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica).

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.

b) Determinare la decomposizione spettrale del tensore T associato ad A rispetto alla base canonica.

c) Trovare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali $< T, \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} >= 18$, con $\mathbf{w} = (1, \alpha, 1)$.

Facoltativo. Dimostrare che un tensore T in uno s.e.r V è una funzione iniettiva $\iff$ $\mathbf{0}$ è l'unico elemento di V per il quale $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.