Primo parziale di Geometria (Ing. Meccanica) 28-10-2009-A

1) Siano $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \begin{cases} 2x - 4y + kz = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \quad k \in \mathbf{R} \ \} \sqsubset \mathbf{R}^3$ e
$W_2 = \{(x - 2z, \alpha y - 3z, -3x + 8y - 6z) \ : \ x, y, z \in \mathbf{R}\} \sqsubset \mathbf{R}^3 \quad (\alpha \in \mathbf{R})$.

a) Al variare di $k \in \mathbf{R}$, trovare una base e la dimensione di W_1.

b) Al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, trovare una base e la dimensione di W_2.

c) Discutere l'appartenenza di $\mathbf{v} = (\beta, 1, -2)$ a W_2 $(\beta \in \mathbf{R})$.

2) Discutere i seguenti sistemi lineari $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$

a) $\begin{cases} x - y + \alpha z = 0 \\ y - 3z = \beta \\ 4x - y - z = 6 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x - y + \alpha z = 0 \\ y - 3z + \beta t = 0 \\ 4x - y - z + 6t = 0 \end{cases}$.

c) Utilizzando i risultati della discussione del sistema a), determinare gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali il piano rappresentato dalla terza equazione di a) risulti parallelo alla retta individuata dall'intersezione dei piani rappresentati dalle altre due equazioni di a). Motivare la risposta.

3) Trovare

a) le equazioni ridotte della retta passante per $P(1,2,3)$ e perpendicolare sia alla retta $r \equiv \begin{cases} x = 2z + 3 \\ y = z + 5 \end{cases}$ che alla retta $s \equiv \begin{cases} x = 2z + 4 \\ y = 3z + 5 \end{cases}$

b) la minima distanza tra le rette $r \equiv \begin{cases} x = 2y \\ z = -3y \end{cases}$ e $s \equiv \begin{cases} x = 2y - 1 \\ z = -3y + 4 \end{cases}$;

c) le equazioni delle (eventuali) sfere aventi il centro sulla retta $t \equiv \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$, raggio $r = \sqrt{5}$ e passanti per il punto $P(1,2,3)$.

Primo parziale di Geometria (Ing. Meccanica) 28-10-2009-B

1) Siano $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \begin{cases} kx + 2y - 4z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \quad k \in \mathbf{R} \ \} \sqsubset \mathbf{R}^3$ e
$W_2 = \{(x + \alpha z, x + 2y, x + 8y - 3z) \ : \ x, y, z \in \mathbf{R}\} \sqsubset \mathbf{R}^3 \quad (\alpha \in \mathbf{R})$.

a) Al variare di $k \in \mathbf{R}$, trovare una base e la dimensione di W_1.

b) Al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, trovare una base e la dimensione di W_2.

c) Discutere l'appartenenza di $\mathbf{v} = (2, \beta, -2)$ a W_2 ($\beta \in \mathbf{R}$).

2) Discutere i seguenti sistemi lineari ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$)

a) $\begin{cases} 2x - y = \beta \\ -3x + \alpha y + 2z = 0 \\ -x - y + 6z = 4 \end{cases}$, b) $\begin{cases} 2x - y + \beta t = 0 \\ -3x + \alpha y + 2z = 0 \\ -x - y + 6z + 4t = 0 \end{cases}$.

c) Utilizzando i risultati della discussione del sistema a), determinare gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali il piano rappresentato dalla terza equazione di a) risulti parallelo alla retta individuata dall'intersezione dei piani rappresentati dalle altre due equazioni di a). Motivare la risposta.

3) Trovare

a) le equazioni ridotte della retta passante per $P(1,2,3)$ e perpendicolare sia alla retta $r \equiv \begin{cases} x = z + 5 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$ che alla retta $s \equiv \begin{cases} x = 4z + 2 \\ y = 2z - 3 \end{cases}$

b) la minima distanza tra le rette $r \equiv \begin{cases} x = 3y \\ z = 2y \end{cases}$ e $s \equiv \begin{cases} x = 3y + 4 \\ z = 2y + 1 \end{cases}$;

c) le equazioni delle (eventuali) sfere aventi il centro sulla retta $t \equiv \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}$, raggio $r = \sqrt{5}$ e passanti per il punto $P(-1,2,3)$.

Primo parziale di Geometria (Ing. Meccanica) 28-10-2009-C

1) Siano $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \begin{cases} kx + 6y - 3z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \quad k \in \mathbf{R} \ \} \sqsubset \mathbf{R}^3$ e
$W_2 = \{(2x + \alpha y, x + 2z, -2x - 3y + 8z) \ : \ x, y, z \in \mathbf{R}\} \sqsubset \mathbf{R}^3 \quad (\alpha \in \mathbf{R})$.

a) Al variare di $k \in \mathbf{R}$, trovare una base e la dimensione di W_1.

b) Al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, trovare una base e la dimensione di W_2.

c) Discutere l'appartenenza di $\mathbf{v} = (1, \beta, 1)$ a W_2 ($\beta \in \mathbf{R}$).

2) Discutere i seguenti sistemi lineari ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$)

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ -2x - 3y + \alpha z = 0 \\ 6x - y + 6z = \beta \end{cases}$, b) $\begin{cases} 3x + 2y + t = 0 \\ -2x - 3y + \alpha z = 0 \\ 6x - y + 6z + \beta t = 0 \end{cases}$.

c) Utilizzando i risultati della discussione del sistema a), determinare gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali il piano rappresentato dalla prima equazione di a) risulti parallelo alla retta individuata dall'intersezione dei piani rappresentati dalle altre due equazioni di a). Motivare la risposta.

3) Trovare

a) le equazioni ridotte della retta passante per $P(1, 2, 3)$ e perpendicolare sia alla retta $r \equiv \begin{cases} x = z + 7 \\ y = 2z - 5 \end{cases}$ che alla retta $s \equiv \begin{cases} y = 2x + 5 \\ z = 3x + 4 \end{cases}$

b) la minima distanza tra le rette $r \equiv \begin{cases} x = 3z \\ y = 2z \end{cases}$ e $s \equiv \begin{cases} x = 3z + 4 \\ y = 2z + 1 \end{cases}$;

c) le equazioni delle (eventuali) sfere aventi il centro sulla retta $t \equiv \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$, raggio $r = \sqrt{5}$ e passanti per il punto $P(1, -2, 3)$.

Primo parziale di Geometria (Ing. Meccanica) 28-10-2009-D

1) Siano $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \begin{cases} 6x - 3y + kz = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \quad k \in \mathbf{R} \ \} \sqsubset \mathbf{R}^3$ e

$W_2 = \{(y+z, \alpha x + z, 8x - 3y + z) \ : \ x,y,z \in \mathbf{R}\} \sqsubset \mathbf{R}^3 \quad (\alpha \in \mathbf{R})$.

a) Al variare di $k \in \mathbf{R}$, trovare una base e la dimensione di W_1.

b) Al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, trovare una base e la dimensione di W_2.

c) Discutere l'appartenenza di $\mathbf{v} = (\beta, -3, -6)$ a W_2 $(\beta \in \mathbf{R})$.

2) Discutere i seguenti sistemi lineari $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$

a) $\begin{cases} -x + z = \beta \\ x + \alpha y = -3 \\ -x + 6y + 4z = -1 \end{cases}$, b) $\begin{cases} -x + z + \beta t = 0 \\ x + \alpha y - 3t = 0 \\ -x + 6y + 4z - t = 0 \end{cases}$.

c) Utilizzando i risultati della discussione del sistema a), determinare gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali il piano rappresentato dalla terza equazione di a) risulti parallelo alla retta individuata dall'intersezione dei piani rappresentati dalle altre due equazioni di a). Motivare la risposta.

3) Trovare

a) le equazioni ridotte della retta passante per $P(1,2,3)$ e perpendicolare sia alla retta $r \equiv \begin{cases} x = 2z - 4 \\ y = z + 2 \end{cases}$ che alla retta $s \equiv \begin{cases} x = 2y + 2 \\ z = 4y + 5 \end{cases}$

b) la minima distanza tra le rette $r \equiv \begin{cases} x = 2z \\ y = -3z \end{cases}$ e $s \equiv \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = -3z + 4 \end{cases}$;

c) le equazioni delle (eventuali) sfere aventi il centro sulla retta $t \equiv \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$, raggio $r = \sqrt{5}$ e passanti per il punto $P(-1,-2,3)$.