Le interpretazioni della probabilità

Laurea Magistrale in Filosofia

UNIPR-UNIMORE-UNIFE

a.a. 2013/2014

Docente: Prof. Marcello D'Agostino

DIPARTIMENTO DI ECONOMIA E MANAGEMENT
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA

Episteme vs doxa

- Nel mondo antico la vera conoscenza doveva essere necessariamente certa e infallibile (**episteme**), un sapere che poggia su fondamenti definitivi e incrollabili.
- Tutto il resto era solo opinione (**doxa**), per sua natura, soggettiva, mutevole e fonte di errore.
- Secondo gli **scettici**, non era possibile conoscere nulla proprio perché nulla può essere essere conosciuto in modo certo e infallibile.
- Secondo quelli che gli scettici chiamavano “dogmatici”, invece in molti campi la ragione era in grado di produrre una conoscenza **dimostrata**, un sapere infallibile che non era soggetto a critiche.

Euclide

Gli **Elementi** di Euclide (365-300 AC) sono il primo trattato di Geometria della storia e costituiscono il primo esempio dell'uso sistematico della **dimostrazione** come strumento di organizzazione e di giustificazione della conoscenza matematica.

La struttura degli Elementi è quella di un **sistema assiomatico** che, da Euclide in poi, è diventato un modello incontrastato per le teorie matematiche

Il modello euclideo

Il modello Euclideo è basato sulla **trasmissione** della **verità** dall'alto verso il basso

Postulati, nozioni comuni, definizioni

deduzione

verità

Teoremi

I limiti del modello euclideo

- Il modello euclideo ha esercitato per secoli un dominio incontrastato nelle scienze matematiche
- Ma non può essere utilizzato nelle situazioni pratiche o scientifiche in cui non possiamo partire da principi certi e universalmente riconosciuti come veri.
- In particolare, non può essere utilizzato quando vogliamo fare **ipotesi e previsioni** a partire dai **dati empirici**.

Inferenze deduttive/induttive

Inferenza deduttiva

(1) Tutti i corvi sono neri

(2) x è un corvo

Dunque, x è nero

Inferenza induttiva

(1) Tutti i cigni osservati finora sono bianchi

(2) x è un cigno

Dunque, x è bianco

Nelle inferenze deduttive la conclusione è **certamente vera** (se lo sono le premesse). In quelle induttive la conclusione è solo **probabile**

A che serve la probabilità?

- La teoria della probabilità entra in gioco in qualunque situazione in cui è necessario fare previsioni o prendere decisioni in **condizioni di incertezza**.
- Per questo essa svolge un ruolo cruciale in **tutte le scienze naturali e sociali** oltre che in ogni genere di **processo decisionale**.
- Con la crescita esponenziale dei dati disponibili sull'uso di **internet**, l'applicazione di metodi probabilistici è indispensabile per ricavare da questa grande massa di dati previsioni di tipo commerciale o politico.

Applicazioni della probabilità

- Scienze statistiche
- Teoria dei giochi
- Economia
- Biologia
- Genetica
- Ecologia
- Medicina
- Fisica (classica e quantistica)
- Meteorologia
- Sismologia
- Finanza
- Ingegneria
- Data mining
- Spam filtering
- Scienze politiche

etc.

L'incertezza

- Se lancio 10 dadi la somma ottenuta sarà minore di 60?
- La Juventus vincerà il campionato?
- Pioverà domenica prossima in Emilia?
- Ci sarà un forte terremoto nella regione A nei prossimi 50 anni?
- Se risulto positivo al test per la malattia A sono effettivamente malato?

L'incertezza

- Chi vincerà le prossime elezioni presidenziali negli stati uniti?
- Qual è l'esatta posizione di un elettrone *e* che si muove con una certa velocità osservata *v*?
- Se una e-mail contiene le parole *X1, ..., Xn*, si tratta di spam oppure no?
- Quale sarà l'accoglienza del nuovo prodotto *P* da parte di una certa categoria di consumatori?

A che serve la probabilità?

- A nessuna di queste domande si può dare una risposta **certa**.
- Non abbiamo informazioni sufficienti oppure le **variabili** che determinano l'evento sono **troppe** e le loro interazioni sono **troppo complesse**.
- Ma incertezza non significa che tutte le risposte sono equivalenti.
- Alcune risposte sono più **plausibili** di altre**.**
- La teoria della probabilità ci aiuta a determinare il **grado di plausibilità** di una risposta sulla base dei dati disponibili e ad **aggiornarlo** sulla base di nuovi dati.

Il “crepuscololo della probabilità”

“Di conseguenza, poiché Dio ha posto alcune cose in piena luce e poiché ci ha dato qualche conoscenza determinata, seppure limitata se confrontata al resto, probabilmente come fosse un assaggio di ciò di cui sono capaci le creature intellettuali e per suscitare in noi il desiderio di una migliore condizione seguente e lo sforzo per conseguirla, così per la maggior parte del nostro interesse egli ci ha offerto, se così posso dire, solo il crepuscolo della probabilità, adeguata, credo, allo stato di mediocrità e di noviziato in cui ha voluto porci in questo mondo” John Locke, *Saggio sull’intelletto Umano* (1690), libro IV.

La logica dell’incerto

“Merita forse anche il titolo di conoscenza l'opinione fondata sulla *plausibilità;* […] Per questo credo che la ricerca sui gradi di *probabilità* sia estremamente importante; […] Così, quando non si potesse decidere con assoluta certezza una questione, si potrebbe almeno determinare il grado di probabilità alla luce dell'evidenza”. G.W. Leibniz, *Nuovi Saggi sull’Intelletto Umano* (1703).

Il demone di Laplace

“Possiamo considerare lo stato attuale dell'universo come l'effetto del suo passato e la causa del suo futuro. Un intelletto che ad un determinato istante dovesse conoscere tutte le forze che mettono in moto la natura, e tutte le posizioni di tutti gli oggetti di cui la natura è composta, se questo intelletto fosse inoltre sufficientemente ampio da sottoporre questi dati ad analisi, esso racchiuderebbe in un'unica formula i movimenti dei corpi più grandi dell'universo e quelli degli atomi più piccoli; per un tale intelletto nulla sarebbe incerto ed il futuro proprio come il passato sarebbe evidente davanti ai suoi occhi” Pierre S. Laplace, *Essai philosophique sur le probabilités* (1814)

Indeterminazione e probabilità nella fisica moderna

"Nell'ambito della realtà le cui connessioni sono formulate dalla teoria quantistica, le leggi naturali non conducono dunque a una completa determinazione di ciò che accade nello spazio e nel tempo; l'accadere (all'interno delle probabilità determinate dalle connessioni) è piuttosto rimesso al caso." (W. Heinsenberg, 1926, in *Indeterminazione e realtà*, Napoli 1991)

Indeterminazione e probabilità nella fisica moderna

"Probabilità in matematica o in meccanica statistica significa un'affermazione sul nostro grado di conoscenza effettiva. Gettando i dadi noi non conosciamo i minuti particolari del moto delle nostre mani che determinano la caduta dei dadi e perciò diciamo che la probabilità che venga un determinato numero è di uno contro 6. L'onda di probabilità di Bohr, Kramers, Slater, tuttavia, significa qualche cosa di più di questo. Essa significa una tendenza verso qualche cosa. Era una versione quantitativa del vecchio concetto di `potenza' nella filosofia aristotelica. Introduceva qualche cosa che stava a metà fra l'idea di un evento e l'evento reale, uno strano tipo di realtà fisica a metà strada fra possibilità e realtà." (W. Heisenberg, *Fisica e filosofia*, Milano 1958)

Rappresentazione numerica della probabilità

Pioverà domenica prossima?

0……………0.25…………..0.5…………..0.75……………1

E’ molto improbabile che piova

E’ più probabile che non piova, piuttosto che piova

E’ più probabile che piova, piuttosto che non piova

E’ molto probabile che piova

Giocatori e filosofi

- Lo studio matematico della probabilità nasce nel XVII secolo da uno scambio fra Blaise Pascal e il Cavalier de Méré, accanito giocatore d'azzardo
- Qual è la probabilità di vincere in un gioco il cui scopo è ottenere **almeno un 6** in 4 lanci di un unico dado?
- Il cavaliere riteneva che bastasse moltiplicare la probabilità di ottenere un 6 (1/6) per il numero di lanci (4) e che dunque questa probabilità fosse uguale a 4/6 = 2/3 = 66%.

Giocatori e filosofi

- Pascal gli fece osservare che in base a una più precisa analisi la probabilità di vincere è di poco superiore al 50%.
- Per stabilirlo, bisogna considerare tutti i **possibili esiti** dei quattro lanci:
- <1,1,1,1>, <1,1,1,2>, … ,<6,6,6,5>, <6,6,6,6>
- Ci sono 1296 disposizioni possibili
- Di queste 671 sono favorevoli e 625 sfavorevoli
- Dunque la probabilità è 671/1296 = 0.51 circa.

Le trappole dell'intuizione

- Nella vita quotidiana tutti usiamo il concetto di probabilità in modo intuitivo e spesso incoerente.
- Un giudizio intuitivo viene spesso smentito da un'analisi più accurata della situazione.
- In generale, in individui non sufficientemente addestrati a fare previsioni probabilistiche, l'intuizione conduce a risposte incoerenti.
- Un noto esempio è quello dei "numeri ritardatari" nel gioco del lotto.

Le trappole dell’intuizione

- Il 90 non esce da un anno sulla ruota di Napoli, dunque c’è una buona probabilità che esca in una delle prossime estrazioni
- L’intuizione che guida questo ragionamento è: dato che la probabilità che esca il 90 in una singola estrazione è 1/90, il 90 dovrebbe uscire in media una volta ogni 90 estrazioni; dunque se non è uscito per un anno (circa 150 estrazioni) c’è una buona probabilità che esca in una delle prossime.

Le trappole dell’intuizione

- Ma se consideriamo che ciascuna estrazione è indipendente da quelle precedenti (l’urna non ha “memoria”), possiamo anche pensare che si svolgano contemporaneamente.
- In questo caso non c’è una “storia precedente” e la probabilità che esca il 90 in ciascuna singola estrazione è sempre la stessa!

Le trappole dell'intuizione

- Gianni è risultato positivo al test per la una certa malattia
- Sappiamo che la frequenza della malattia in questione nella popolazione è dell'1 %.
- Il test ha un'affidabilità del 99%. Cioè il 99% dei malati risultano positivi e il 99% dei sani risultano negativi.
- Qual è la probabilità che Gianni sia malato dato che è risultato positivo al test?
- Molti rispondono intuitivamente che Gianni è malato con una probabilità del 99%

Le trappole dell'intuizione

- Invece la probabilità che Gianni sia malato è solo del 50%.
- Questa probabilità può essere facilmente calcolata usando il **Teorema di Bayes**, uno degli strumenti fondamentali della teoria della probabilità di cui parleremo in seguito.
- Possiamo però spiegare questa probabilità in modo **intuitivo**. E in questo caso l'intuizione dà una risposta completamente diversa da quella precedente.

Le trappole dell’intuizione

- Dato che la malattia colpisce l’1% della popolazione, in un villaggio di 10.000 persone possiamo aspettarci che 100 persone siano malate e 9900 sane.
- Dato che l’affidabilità del test è il 99%, possiamo aspettarci che risultino positivi 99 malati, ma anche 99 persone sane (l’1% di 9900) .
- Dunque solo la **metà** delle 198 persone che sono risultate positive al test è effettivamente malata.

Concetti di probabilità

- Lanciando una moneta si ha una probabilità del 50% di ottenere “testa”.
- La probabilità che domani piova è il 70%.
- Lanciando un dado si ha una probabilità 1/6 di ottenere 6.
- C’è una probabilità dell’1% che a Palermo piova il 20 luglio.
- La Juventus ha una probabilità del 90% di vincere il campionato 2013-2014.
- C’è una probabilità su un milione che ci sia un incidente nucleare con rilascio significativo di materiale radioattivo.

Che cosa significano queste affermazioni? Hanno tutte lo stesso significato?

La definizione classica

Definizione classica: La probabilità di un evento *E* è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili, purché questi ultimi siano ugualmente possibili.

Quindi se i casi possibili sono n e i casi favorevoli sono n_E, secondo la definizione classica la probabilità che accada l'evento *E* sarà:

$$\Pr(E) = \frac{n_E}{n}$$

Esempio 1

- Se lancio una moneta (corretta) i casi possibili sono 2 e si tratta di casi “ugualmente possibili”
- Dunque la probabilità che esca Testa (o Croce) è 1/2.
- Se lancio un dado (corretto) i casi possibili sono 6 e si tratta di casi “ugualmente possibili”
- Dunque la probabilità che esca 1 (oppure un altro qualunque dei 6 risultati possibili) è 1/6.

Esempio 2

- Se lancio un dado corretto, qual è la probabilità che esca un numero pari?
- Qui i casi favorevoli sono 3 (2,4,6) e i casi possibili sono sempre 6.
- Dunque se *E* = uscirà un numero pari

$$\Pr(E) = 3/6 = 1/2 = 0.5$$

Esempio 3

- Qual è la probabilità di estrarre a caso un asso da un mazzo di carte ben mescolato?
- Qui i casi favorevoli sono 4 e i casi possibili 52, dunque se *E*= estrarrò un asso

$$\Pr(E) = \frac{4}{52} = 0.0769$$

Proprietà della definizione classica

- Notate che secondo la definizione classica (numero di casi favorevoli diviso numero di casi possibili) la probabilità di un evento *E* è sempre compresa fra 0 e 1:

$$0 \leq \Pr(E) \leq 1$$

Probabilità complementari

- Se lancio un dado, la probabilità che NON esca un 6 è chiaramente di 5/6.
- Vi sono infatti 5 casi su 6 che verificano la previsione “NON uscirà un 6”.
- In generale, se ci sono *N* casi possibili e i casi favorevoli a *E* sono n_E, ci saranno N-n_E casi favorevoli a non-*E*. Dunque:

$$\Pr(\text{non-}E) = \frac{N - n_E}{N} = \frac{N}{N} - \frac{n_E}{N} = 1 - \Pr(E)$$

Unione di eventi disgiunti

- Due eventi si dicono **disgiunti** se non è possibile che si verifichino contemporaneamente.
- Dalla definizione classica segue che se due eventi E_1 ed E_2 sono **disgiunti**, allora la probabilità che si verifichi uno dei due è data dalla somma delle probabilità degli eventi presi separatamente.

$$\Pr(E_1 \text{ oppure } E_2) = \Pr(E_1) + \Pr(E_2)$$

- Per esempio, la probabilità che, lanciando un dado, esca 1 oppure 6 è 1/6 + 1/6 = 2/6.

Unione di eventi non disgiunti

- Cosa succede se gli eventi non sono disgiunti?
- Lanciando due dadi corretti, qual è la probabilità che uno dei due dia 6? Cioè se
  - E_1 = esce 6 con il primo dado
  - E_2 = esce 6 con il secondo dado

  Qual è la probabilità di E = E_1 oppure E_2
- Qui i casi possibili sono 36. I casi favorevoli a E_1 sono 6 e altrettanti sono i casi favorevoli a E_2. Se facciamo la somma delle due probabilità dovremmo concludere che la probabilità di E è uguale a 12/36.
- Ma in questo caso staremmo contando due volte il caso in cui **entrambi** i dadi danno 6

Unione di eventi non disgiunti

<1,1> <1,2> <1,3> <1,4> <1,5> **<1,6>**

<2,1> <2,2> <2,3> <2,4> <2,5> **<2,6>**

<3,1> <3,2> <3,3> <3,4> <3,5> **<3,6>**

<4,1> <4,2> <4,3> <4,4> <4,5> **<4,6>**

<5,1> <5,2> <5,3> <5,4> <5,5> **<5,6>**

<6,1> <6,2> <6,3> <6,4> <6,5> <6,6>

La probabilità corretta è 11/36.

Legge generale della somma

- **La probabilità che si verifichi almeno uno fra due eventi è la somma delle loro probabilità meno la probabilità che si verifichino entrambi.**

$$\Pr(E_1 \text{ oppure } E_2) = \Pr(E_1) + \Pr(E_2) - \Pr(E_1 \text{ e } E_2)$$

Eventi indipendenti

- Se lanciamo due volte un dado non truccato, la probabilità che esca un certo numero al secondo lancio non è minimamente influenzata dal numero che è uscito al primo lancio (il dado non ha "memoria").
- Dunque la probabilità di ottenere un 6 al secondo lancio, è indipendente dal risultato che è stato ottenuto al primo lancio.
- In questo caso si dice che i due eventi, il primo lancio e il secondo lancio, sono **indipendenti**

Congiunzione di eventi indipendenti

- La probabilità che si verifichino insieme due eventi **indipendenti** è uguale al prodotto delle probabilità dei due eventi separati.
- La probabilità che lanciando due volte un dado esca 6 entrambe le volte è 1/6x1/6=1/36.
- Se E_1 ed E_2 sono eventi indipendenti:

$$\Pr(E_1 \text{ e } E_2) = \Pr(E_1) \times \Pr(E_2)$$

Congiunzione di eventi indipendenti

<1,1> <1,2> <1,3> <1,4> <1,5> <1,6>

<2,1> <2,2> <2,3> <2,4> <2,5> <2,6>

<3,1> <3,2> <3,3> <3,4> <3,5> <3,6>

<4,1> <4,2> <4,3> <4,4> <4,5> <4,6>

<5,1> <5,2> <5,3> <5,4> <5,5> <5,6>

<6,1> <6,2> <6,3> <6,4> <6,5> **<6,6>**

Congiunzione di eventi non indipendenti

- Supponete che in un urna ci siano 10 palline, 5 bianche e 5 nere.
- Qual è la probabilità che in due estrazioni la pallina estratta sia in entrambi i casi bianca?
- E1 = la prima pallina estratta è bianca
- E2 = la seconda pallina estratta è bianca
- E1 ed E2 non sono **indipendenti**.
- La probabilità di E1 è 5/10. Ma la probabilità di E2, **dato che E1** si è verificato, è 4/9.

Congiunzione di eventi non indipendenti

Chiamiamo B1,…,B5 le palline bianche e N1,…,N5 le palline nere.

I casi possibili sono 90. Di questi quelli favorevoli sono

<B1,B2>, <B1,B3>, <B1,B4>,<B1,B5>

<B2,B1>, <B2,B3>, <B1,B4>,<B2,B5>

<B3,B1>,<B3,B2>, <B3,B4>, <B3,B5>

<B4,B1>, <B4,B2>, <B4,B3>, <B4,B5>

<B5,B1>, <B5,B2>, <B5,B3>, <B5,B4>

Quindi la probabilità è 20/90 = 5/10 x 4/9 = 0.222

Legge generale del prodotto

- **La probabilità che due eventi si verifichino insieme è uguale al prodotto della probabilità del primo per la probabilità del secondo dato che il primo si è verificato**

$$\Pr(E_1 \text{ e } E_2) = \Pr(E_1) \times \Pr(E_2 \mid E_1)$$

- $\Pr(E_2|E_1)$ è la **probabilità condizionata** che si verifichi E_2 **dato che** E_1 si è verificato.
- N.B.: se E_1 e E_2 sono indipendenti $\Pr(E_2|E_1) = \Pr(E_2)$

Probabilità condizionata

La probabilità che si verifichi un evento *E_2* dato che si è verificato l'evento *E_1* è uguale alla probabilità che si verifichino entrambi gli eventi diviso la probabilità che si verifichi *E_1*.

$$\Pr(E_2 \mid E_1) = \frac{\Pr(E_1 \text{ e } E_2)}{\Pr(E_1)}$$

Esempio

- Se lanciamo due dadi e supponiamo che il primo dia 3, qual è la probabilità che la somma dei due dadi dia 8?
- *E*= la somma è 8,
- *F* = il primo dado dà 3
- Vogliamo valutare la probabilità condizionata Pr(E|F), cioè la probabilità di E **dato che** F si è verificato
- Supponendo che tutti gli esiti siano equiprobabili, i casi possibili sono:
- <3,1>, <3,2>, <3,3>, <3,4>, <3,5>, <3,6>
- Dunque Pr(E|F) è uguale a 1/6.
- Pr(E|F) = numero di casi in cui si verificano entrambi gli eventi **diviso** numero di casi in cui si verifica F. Ovvero:

$$\Pr(E \mid F) = \frac{\Pr(E \text{ e } F)}{\Pr(F)} = \frac{1/36}{6/36} = \frac{1}{6}$$

Problemi della definizione classica

- Cosa vuol dire che i casi sono "ugualmente possibili"?
  - Se "ugualmente possibili" significa "ugualmente probabili" c'è un sospetto di circolarità.
  - In ogni caso, come si fa a stabilire che i casi sono ugualmente probabili?
- Cosa si fa nel caso in cui gli esiti palesemente **non** sono "ugualmente possibili"? Qual è la probabilità che esca un 6 se il dado è truccato? O la probabilità che la Juventus vinca domenica prossima?

La definizione frequentista

Definizione frequentista: La probabilità di un evento *E* è il limite della frequenza (relativa) dei successi, cioè del verificarsi dell'evento, quando il numero delle prove tende all'infinito.

$$\Pr(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_E}{n}$$

Le leggi fondamentali della probabilità

$$\Pr(\text{non-}E) = 1 - \Pr(E)$$

$$\Pr(E \text{ o } F) = \Pr(E) + \Pr(F) - \Pr(E \text{ e } F)$$

$$\Pr(E \text{ e F}) = \Pr(E) \times \Pr(F|E)$$

$$\Pr(F|E) = \frac{\Pr(E \text{ e } F)}{\Pr(E)}$$

Queste leggi sono valide **sia** per l'interpretazione classica **sia** per quella frequentista.

Esempio

- Se lancio una moneta un gran numero di volte, la frequenza del risultato Testa (o Croce), cioè il rapporto fra il numero di volte in cui esce Testa (o Croce) e il numero di lanci effettuati, tende a stabilizzarsi intorno a un valore *P* ben definito (per esempio il 50% se la moneta è corretta).
- Secondo la concezione frequentista la probabilità che lanciando quella moneta esca Testa (o Croce) non è altro che questo valore verso il quale tenderebbe a stabilizzarsi la frequenza.

Problemi della concezione frequentista

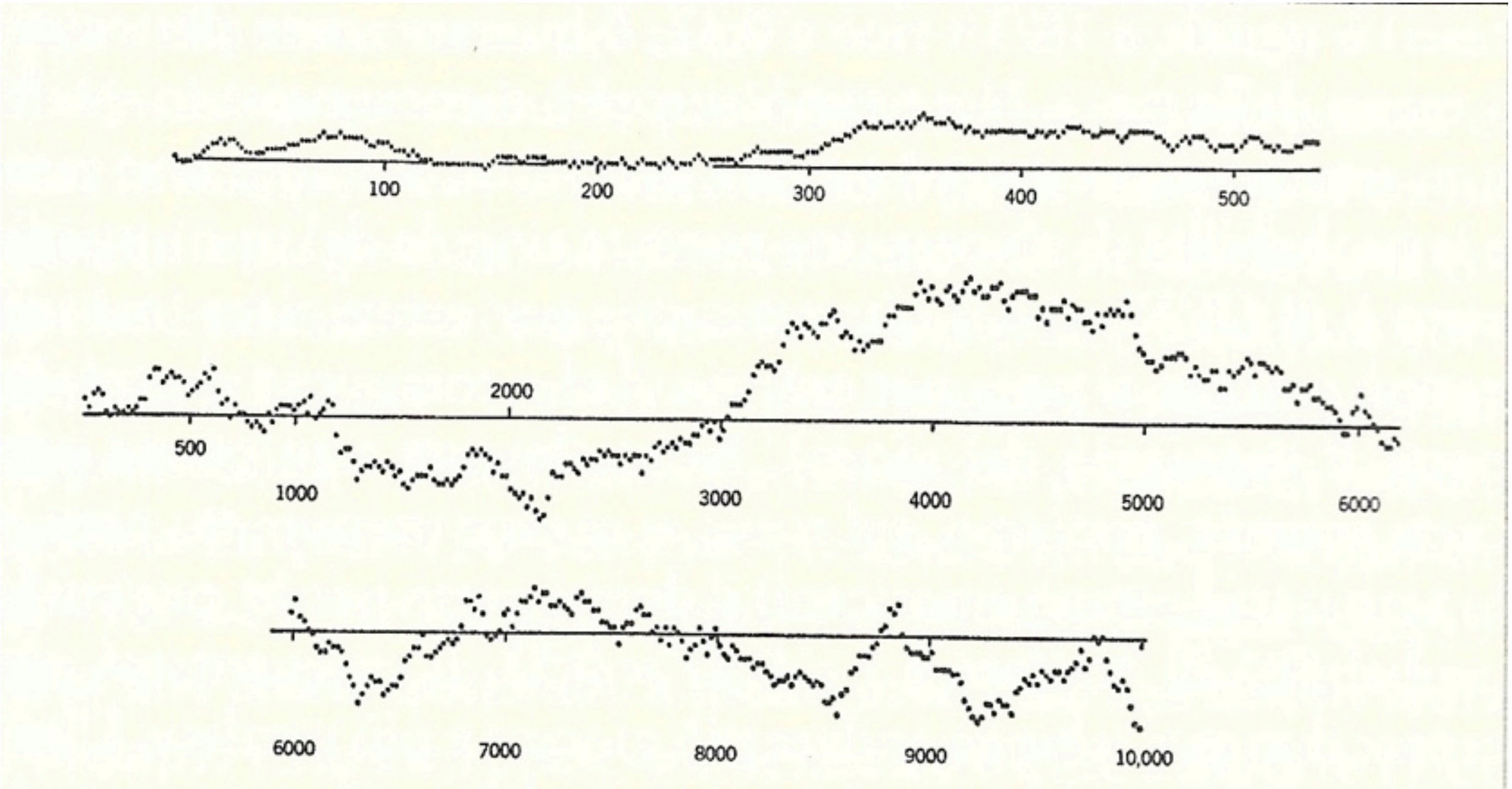
- Definizione abbastanza oscura.
- Perché la definizione abbia senso è necessario che gli esperimenti casuali siano ripetuti esattamente nelle stesse condizioni.
- Ma come si fa a sapere che le condizioni sono le stesse?
- Quali sono le variazioni che possono influire sul risultato?
- Come distinguiamo le variazioni che influiscono sul risultato da quelle che non influiscono sul risultato?

Problemi della concezione frequentista

Inoltre:

- Come facciamo a sapere che la frequenza effettivamente tende a un limite?
- Ma anche se così fosse, perché la definizione sia operativa dovremmo saperne di più sul modo in cui converge verso questo presunto limite.

Simulazione di diecimila lanci di una moneta corretta



Problemi della concezione frequentista

- Ma il problema principale della definizione frequentista è forse che essa non è in grado di spiegare l'assegnazione di probabilità a **eventi singoli**, che ovviamente non sono ripetibili indefinitamente nelle stesse condizioni.
  - Qual è la probabilità che la Juventus vinca il campionato 2013/2014?
  - Qual è la probabilità che esploda la centrale nucleare di ultima generazione appena costruita?
  - Qual è la probabilità che Mr. X vinca le prossime elezioni presidenziali negli stati uniti?

La probabilità soggettiva

- Secondo la concezione **soggettivista** della probabilità, la probabilità misura il **grado di credenza** di un individuo nel verificarsi o meno di un evento
- Le probabilità sono dunque **soggettive** (addirittura personali) per definizione e si **rivelano** nella disponibilità o meno ad accettare determinate scommesse.

Il gioco di De Finetti

- Un vostro amico vi dice di essere sicuro “al 99%” che la Juventus vincerà il campionato. Voi potete chiedergli: preferisci avere 1000 euro se la Juventus vince oppure se estrai una pallina bianca da un’urna che ne contiene 98 bianche e 2 nere.
- Se accetta la seconda alternativa, vuol dire che la sua “vera” probabilità soggettiva è inferiore al 99%.

Il gioco di De Finetti

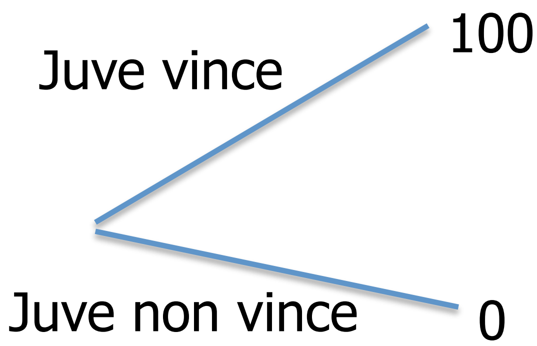
- Il gioco può continuare: gli chiedete se preferisce avere 1000 euro se la Juventus vince il campionato oppure se estrae una pallina bianca da un’urna che ne contiene 70 bianche e 30 nere.
- Se risponde che preferisce la prima alternativa, vuol dire che la sua probabilità soggettiva è superiore al 70%

Il gioco di De Finetti

- Continuando il gioco si arriverà a un punto in cui il vostro amico è indifferente fra le due alternative.
- Se per esempio questo punto è raggiunto quando l'urna contiene 80 palline bianche e 20 nere, vuol dire che la sua vera probabilità soggettiva è dell'80%.

Prezzo equo/1

- Supponete che vi venga offerto un biglietto di una lotteria che vi dà 100 euro se la Juventus vince il campionato e nulla se la Juventus non vince il campionato.



- Il **prezzo** che siete disposti a pagare per questo biglietto dipende dal vostro **grado di fiducia** nel fatto che la Juventus vinca il campionato.

Prezzo equo/2

- Se siete sicuri al 100% che la Juventus vincerà il campionato, sarete disposti a pagare qualsiasi prezzo (fino a 100 euro) per un biglietto di questa lotteria.
- Se siete sicuri al 100% che la Juventus non vincerà, non sarete disposti a pagare nulla.
- In tutti i casi intermedi ci sarà sempre un **prezzo massimo** che sarete disposti a pagare.

Prezzo equo/3

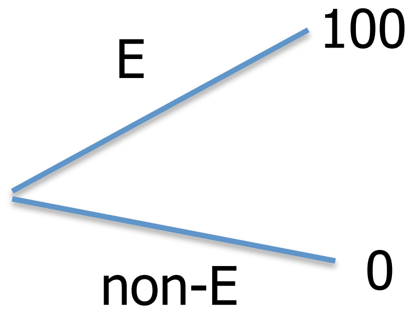
- Più precisamente: c'è sempre un prezzo *P* per il quale vi è **indifferente** comprare un biglietto per *P* euro, vendere un biglietto per *P* euro o non giocare affatto.
- Questo prezzo *P* è il **prezzo equo** della lotteria.
- In tal caso la vostra probabilità soggettiva che la Juventus vinca il campionato è *P*/100.
- Per esempio, se il prezzo equo per voi è 70 euro, la vostra probabilità soggettiva che la Juventus vinca il campionato è del 70%.

Valutazione della probabilità soggettiva/1

In generale, la **probabilità soggettiva** di un evento *E* per un dato individuo *x* è uguale a

$$\frac{P}{100}$$

dove *P* è il **prezzo equo** per *x* della scommessa*:*



Valutazione della probabilità soggettiva/2

- Il prezzo per voi equo di una lotteria è ovviamente influenzato dalle **informazioni** che avete a disposizione (nel caso di una partita di calcio: giocatori disponibili, stato di forma delle squadre, etc.).
- Dunque le probabilità soggettive (diverse da individuo a individuo) dipendono dalle informazioni che sono disponibili all'individuo che le assegna e si rivelano nella disponibilità o meno ad accettare certe scommesse.

Valutazione della probabilità soggettiva/3

- Ma la probabilità soggettiva non è **univocamente determinata** dalle informazioni disponibili (individui diversi con le stesse informazioni potrebbero assegnare probabilità diverse).
- La probabilità soggettiva riflette il vostro **stato d'animo** rispetto al verificarsi o meno dell'evento.
- Questo stato d'animo è influenzato, ma non è univocamente determinato, dalle informazioni a vostra disposizione.

Vantaggi della concezione soggettivista

- E' una definizione chiara e coerente
- Ha un ambito di applicazione praticamente illimitato.
- Può essere applicata in tutti i casi in cui possono essere applicate la definizione classica e quella frequentista.
- Ma può essere applicata anche a eventi unici e irripetibili (ai quali non può essere applicata la definizione frequentista) in cui i casi possibili non sono ugualmente probabili (per cui non può essere applicata neanche quella classica):
  - Qual è la probabilità che vi sia un incidente nella centrale nucleare appena costruita?
  - Qual è la probabilità che il Barcellona vinca la coppa dei campioni?

Problemi della concezione soggettivista

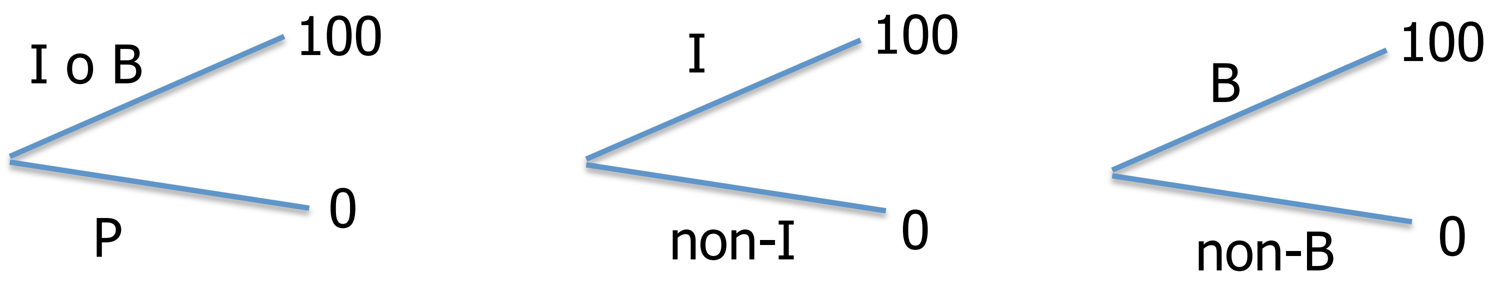
- Molti scienziati rifiutano l'idea che la probabilità sia qualcosa di irrimediabilmente soggettivo e preferiscono la concezione frequentista, nonostante le sue difficoltà e il suo ambito di applicabilità piuttosto ristretto.
- Non è del tutto banale dimostrare che la probabilità soggettiva soddisfa le stesse leggi matematiche che valgono per la definizione classica e per quella frequentista.

L’argomento della scommessa olandese

- Supponiamo che, pur valutando 0,6 la probabilità di vittoria dell’Inter e 0,2 la probabilità di vittoria del Bologna io valutassi 0,75 la probabilità di vittoria di una delle due squadre, **contro** le regole del calcolo delle probabilità.
- Allora io dovrei essere contemporaneamente disposto a:
  - Vendere per 75 euro la promessa di pagarne 100 se vince l’Inter o il Bologna
  - Comprare per 60 euro la promessa di ricevere 100 euro se vince l’inter
  - Comprare per 20 euro la promessa di ricevere 100 euro se vince il Bologna

L'argomento della scommessa olandese

I = Vince l'Inter   B = Vince il Bologna   P = pareggio



Ho venduto un biglietto della prima lotteria per 75€

Ho comprato un biglietto della seconda lotteria per 60€

Ho comprato un biglietto della terza lotteria per 20€

Se vince l'Inter i 100€ che vinco nella seconda lotteria li devo dare al vincitore della prima.

Se vince il Bologna i 100€ che vinco nella terza lotteria li devo dare al vincitore della prima.

Se pareggiano, non vinco nessun premio e non pago nessun premio

In ogni caso ho speso 80€ e ne ho incassati 75!

Probabilità soggettiva e vincoli di razionalità

- L'argomento della scommessa olandese mostra che un individuo razionale, per quanto sia libero di assegnare le probabilità iniziali agli eventi elementari nel modo che corrisponde al proprio "stato d'animo", è obbligato ad essere **coerente** nell'assegnare le probabilità agli eventi complessi.
- In generale l'argomento della scommessa olandese viene usato per dimostrare che per un individuo razionale è **inevitabile** rispettare le leggi della probabilità.