Problemi indeterminati

Un **problema indeterminato** è una domanda D alla quale, sulla base delle nostre informazioni, non siamo in grado di dare una risposta determinata, ma solo un insieme di risposte **possibili**.

- Quale sarà il sesso del nascituro?
- Se lancio una moneta, uscirà testa o croce?
- Pioverà il 15 marzo?
- Chi è l'assassino del conte?
- Se lancio due dadi, quale sarà la somma dei numeri sulle facce?

Spazio campionario

Lo **spazio campionario** associato a un problema indeterminato D è l'insieme Ω di tutte le possibili situazioni che determinano univocamente una risposta a D.

La definizione conveniente dello spazio campionario associato a un problema D è un compito non banale. Gli elementi dello spazio campionario devono essere situazioni "elementari", che non siamo in grado di analizzare ulteriormente in combinazioni di situazioni più semplici.

Esempi/1

D: Qual è il sesso del nascituro?

Ω = {f, m}; f = è femmina; m = è maschio.

D: se lancio una moneta, uscirà testa o croce?

Ω = {T, C}; T = uscirà testa; C = uscirà croce.

D: pioverà il 15 marzo?

Ω = {p, np}; p = pioverà; np = non pioverà.

Esempi/2

D: Chi è l’assassino del conte?

Ω = {a,b,c,d}; a,b,c,d sono i possibili assassini.

D: se lancio un dado che faccia uscirà?

Ω = {1, 2,3,4,5,6}.

D: se lancio due monete, quale sarà il risultato?

Ω = {<T,T>, <T,C>, <C,T>, <C,C>}.

Esempi/3

D: se lancio due monete, quante volte otterrò testa?

$\Omega_1 = \{0, 1, 2\}$

$\Omega_2 = \{<T,T>, <T,C>, <C,T>, <C,C>\}$

Quale fra Ω_1 e Ω_2 è secondo voi lo spazio campionario più appropriato? E perché?

Esempi/4

D: se lancio 2 dadi, quale sarà la somma dei numeri sulle facce?

$\Omega_1 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$\Omega_2 = \{<1,1>, <1,2>, <1,3>, <1,4>, <1,5>, <1,6>, <2,1>, <2,2>, <2,3>, <2,4>, <2,5>, <2,6>, <3,1>\ldots\}$

Qual è lo spazio più appropriato?

Quanti sono gli elementi di Ω_2?

Eventi/1

- Un **evento** è un qualsiasi sottoinsieme E dello spazio campionario Ω
- L'intero spazio Ω rappresenta l'**evento certo**.
- L'insieme vuoto Ø rappresenta l'**evento impossibile.**
- Un **evento semplice** è un sottoinsieme di Ω che contiene un solo elemento
- Un evento si **verifica** quando si verifica **almeno una** delle situazioni che esso contiene.

Eventi/2

- Dati gli eventi E ed F:
  - $E \cup F$ è l'evento che si verifica quando si verifica E **oppure** si verifica F (è l'insieme che contiene le situazioni che sono contenute in E e le situazioni che sono contenute in F)
  - $E \cap F$ è l'evento che si verifica quando si verificano **sia** E **sia** F (è l'insieme delle situazioni contenute sia in E sia in F)
  - E^c è l'evento che si verifica quando **non** si verifica E (è l'insieme delle situazioni che non sono contenute in E)

Gli assiomi della probabilità

Assioma 1 $0 \leq \Pr(E) \leq 1$

Assioma 2 $\Pr(\Omega) = 1$

Assioma 3 $\Pr\left(E_1 \cup \cdots \cup E_n\right) = \Pr(E_1) + \cdots + \Pr(E_n)$

quando gli eventi $E_1, \ldots, E_n$ sono tutti **mutuamente esclusivi**.

Da questi assiomi si **deducono** tutte le "leggi" della Probabilità. Vediamo alcuni esempi.

Probabilità dell'evento complementare

Segue dagli Assiomi 2 e 3 che:

$$1 = \Pr(\Omega) = \Pr(E \cup E^c) = \Pr(E) + \Pr(E^c)$$

per cui:

$$\Pr(E^c) = 1 - \Pr(E)$$

Probabilità dell'evento impossibile

- Dall'Assioma 2 e dal lemma appena dimostrato sulla probabilità degli eventi complementari segue segue che:

$$\Pr(\emptyset) = \Pr(\Omega^c) = 1 - \Pr(\Omega) = 1 - 1 = 0$$

Assegnazioni di Probabilità agli eventi semplici

- Lanciamo una moneta e ci chiediamo quale faccia uscirà:
  - Se abbiamo motivo di ritenere che non ci sia alcuna ragione sufficiente a propendere per uno dei due risultati, allora

$$\Pr(\{T\}) = \Pr(\{C\})$$

  - E dunque, per l'Assioma 3

$$\Pr(\{T\}) = \Pr(\{C\}) = 1/2$$

Esempio

- Supponiamo di lanciare due monete equilibrate.
- Qual è lo spazio campionario?
- Come assegniamo le probabilità degli eventi semplici?
- Qual è la probabilità che **almeno una** delle due monete abbia dato testa?

Esempio

$$\Omega = \left\{ \left\langle T,T \right\rangle, \left\langle T,C \right\rangle, \left\langle C,T \right\rangle, \left\langle C,C \right\rangle \right\}$$

$$\Pr(\Omega) = 1 = \Pr(\left\{ \left\langle T,T \right\rangle \right\}) + \Pr(\left\{ \left\langle T,C \right\rangle \right\}) + \Pr(\left\{ \left\langle C,T \right\rangle \right\}) + \Pr(\left\{ \left\langle C,C \right\rangle \right\})$$

$$\Pr(\left\{ \left\langle T,T \right\rangle \right\}) = \Pr(\left\{ \left\langle T,C \right\rangle \right\}) = \Pr(\left\{ \left\langle C,T \right\rangle \right\}) = \Pr(\left\{ \left\langle C,C \right\rangle \right\}) = \frac{1}{4}$$

$$\Pr(E) = \Pr(\left\{ \left\langle T,T \right\rangle, \left\langle T,C \right\rangle, \left\langle C,T \right\rangle \right\} = \Pr(\left\{ \left\langle T,T \right\rangle \right\}) + \Pr(\left\{ \left\langle T,C \right\rangle \right\}) + \Pr(\left\{ \left\langle C,T \right\rangle \right\}) = \frac{3}{4}$$

oppure

$$\Pr(E) = 1 - \Pr(E^c) = 1 - \Pr(\left\{ \left\langle C,C \right\rangle \right\}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Altre semplici teoremi/1

Supponiamo che $E \subset F$. Allora:

$F = E \cup (E^c \cap F)$

Dunque, dato che E ed $E^c \cap F$ sono disgiunti:

$\Pr(F) = \Pr(E) + \Pr(E^c \cap F)$

Ma, per l'Assioma 1, $\Pr(E^c \cap F) \geq 0$, per cui:

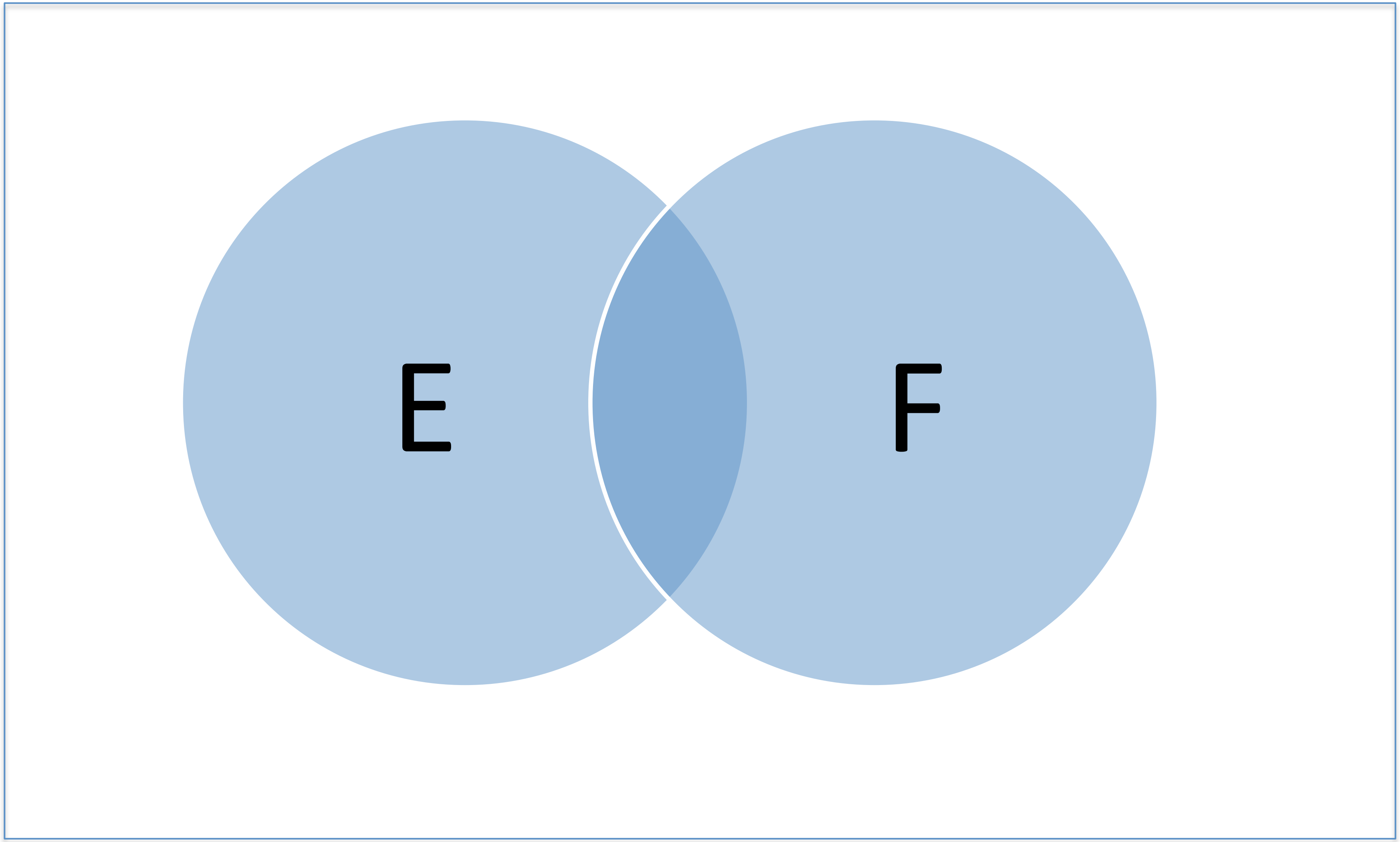
$\Pr(E) \leq \Pr(F)$

Altre semplici teoremi/2

Osserviamo che (vedi figura nella prossima slide)

$$E \cup F = (E \cap F^c) \cup (F \cap E^c) \cup (E \cap F)$$
$$\Pr(E \cup F) = \Pr(E \cap F^c) + \Pr(F \cap E^c) + \Pr(E \cap F)$$
$$E = (E \cap F^c) \cup (E \cap F)$$
$$\Pr(E) = \Pr(E \cap F^c) + \Pr(E \cap F)$$
$$\Pr(E \cup F) = \Pr(E) + \Pr(F \cap E^c)$$
$$F = (F \cap E^c) \cup (E \cap F)$$
$$\Pr(F) = \Pr(F \cap E^c) + \Pr(E \cap F)$$
$$\Pr(F \cap E^c) = \Pr(F) - \Pr(E \cap F)$$

$$\boxed{\Pr(E \cup F) = \Pr(E) + \Pr(F) - \Pr(E \cap F).}$$


E
F

Spazi campionari con esiti equiprobabili/1

- In molti casi un modo naturale di definire lo spazio campionario consiste nel suddividerlo in eventi semplici equiprobabili.
- Una buona regola pratica è cercare di definire lo spazio campionario in questo modo **ogni volta che è possibile farlo.**
- In tal caso lo spazio campionario dovrà essere un insieme f**inito**.

Spazi campionari con esiti equiprobabili/2

- Se lo spazio campionario è finito e gli eventi semplici sono tutti equiprobabili, allora segue dagli assiomi che:

$$\Pr(E) = \frac{\text{numero elementi di } E}{\text{numero elementi di } \Omega}$$

Perché? Come si giustifica sulla base degli assiomi?

Esempio 1

- Se estraiamo a caso 3 palline da un'urna che contiene 6 palline bianche e 5 nere, qual è la probabilità che 1 sia bianca e le altre 2 nere?
- Quanti esiti contiene lo spazio campionario?
- Quanti sono gli esiti che in cui si verifica che una pallina estratta è bianca e le altre due nere?

Esempio 1

- Supponete di identificare ciascuna pallina con un nome, per esempio B1,…,B6 per quelle bianche e N1, …,N5 per quelle nere.
- Allora è chiaro che lo spazio campionario consisterà di 11 x 10 x 9 = 990 esiti.
- Gli esiti nei quali la prima pallina è bianca e le altre due sono nere sono 6 x 5 x 4 = 120.
- Gli esiti nei quali la seconda pallina estratta è bianca e le altre due sono nere sono 5 x 6 x 4 = 120.
- Gli esiti nei quali la terza pallina è bianca e le prime due nere sono 5 x 4 x 6 = 120.
- Quindi la probabilità è (120 + 120 +120) /990 = 4/11.

Disposizioni

- Il numero delle possibili **disposizioni** di *n* oggetti a *k* a *k* è dato da:

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

- Per esempio, se *n*=11 e *k*=3 il numero delle possibili disposizioni è

$$\frac{11\times 10\times 9\times 8\times 7\times \cdots \times 2\times 1}{8\times 7\times \cdots \times 2\times 1} = 11\times 10\times 9 = 990$$

Combinazioni

- Osservate che ciascun insieme di *k* oggetti si può presentare in *k*! disposizioni diverse.
- Esempio: {a,b,c} si può presentare nelle seguenti 6 (= 3!) disposizioni: <a,b,c>, <a,c,b>,<b,a,c>,<b,c,a>,<c,a,b>,<c,b,a>
- Dunque il numero di sottoinsiemi di *k* oggetti che si possono formare da un insieme di *n* oggetti (con *k*≤*n*) è dato da:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Esempio 1 (rivisitato)

- Possiamo risolvere il problema precedente usando come spazio campionario quello dei possibili **insiemi** di tre palline che possono essere formati a partire dall'insieme di 11 palline.
- In questo caso l'insieme degli esiti è:

$$\binom{11}{3} = \frac{11!}{8! \times 3!} = \frac{39916800}{40320 \times 6} = 165$$

Esempio 1 (rivisitato)

- Gli esiti che verificano l'evento che ci interessa sono gli insiemi formati da una pallina bianca e due nere, per cui la probabilità dell'evento è:

$$\frac{\binom{6}{1}\times\binom{5}{2}}{\binom{11}{3}} = \frac{6\times 10}{165} = \frac{4}{11}$$

Esempio 2

- Una commissione di 5 persone viene estratta da un gruppo composto da 6 uomini e 9 donne. Se l'estrazione è casuale qual è la probabilità che il gruppo sia composto da 3 uomini e 2 donne?
- Per "casuale" intendiamo che tutti i possibili gruppi sono equiprobabili.

Esempio 2

- Lo spazio campionario è dato da tutti i possibili insiemi di 5 persone che possono essere formati a partire dalle 15 persone disponibili.
- Dunque il numero di esiti possibili è

$$\binom{15}{5} = 3003$$

Esempio 2

- Il numero di esiti favorevole è uguale a tutti i possibili gruppi formati da 3 uomini e 2 donne.
- Dunque la probabilità che il gruppo sia formato da 3 uomini e 2 donne è:

$$\frac{\binom{6}{3} \times \binom{9}{2}}{\binom{15}{5}} = \frac{20 \times 36}{3003} = \frac{720}{3003} = \frac{240}{1001}$$

Esempio 3

- Nel gioco del poker, qual è la probabilità di ricevere un full servito?
- Quanti elementi contiene lo spazio campionario?
- Per ciascun tipo di carta (cioè senza tenere conto del seme) quanti sono i possibili tris? E quante sono le possibili coppie?
- Quanti sono i tipi di full (e.g. tris d'assi e coppia di regine)?

Esempio 3

- Qui lo spazio campionario è costituito da tutte le possibili combinazioni di 52 carte a 5 a 5, cioè:

$$\binom{52}{5} = 2598960$$

- Per ciascun tipo di carta ci sono $\binom{4}{2} = 6$ possibili coppie e $\binom{4}{3} = 4$ possibili tris

Esempio 3

- Dato che ci sono 13 possibili scelte per le coppie e, per ciascuna di esse, 12 possibili scelte per il tris (o viceversa), la probabilità di ottenere un full servito è

$$\frac{13 \times 12 \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{3}}{\binom{52}{5}} = \frac{13 \times 12 \times 6 \times 4}{2598960} = \frac{3744}{2598960} = 0.0014\ldots$$

Il problema di Galileo

- Se lanciamo 3 dadi non truccati, qual è la probabilità di ottenere 9? E qual è la probabilità di ottenere 10?
- Quanti sono gli elementi dello spazio campionario?
- Le possibili "triplette" per il 9 e il 10 sono, rispettivamente:

1+2+6, 1+3+5, 1+4+4, 2+2+5, 2+3+4, 3+3+3

1+3+6, 1+4+5, 2+2+6, 2+3+5, 2+4+4, 3+3+4

Quanti sono gli eventi semplici che danno luogo a ciascuna somma?

Probabilità condizionata

- La definizione generale della probabilità condizionata è:

$$\boxed{\Pr(E \mid F) = \frac{\Pr(E \cap F)}{\Pr(F)}}$$

se $\Pr(F) > 0$

Esempio

- Una moneta viene lanciata due volte. Supponendo che gli esiti siano tutti equiprobabili, qual è la probabilità condizionata che venga Testa in entrambi i lanci, sapendo che è venuto Testa nel primo?

$$\Omega = \{(T,T),(T,C),(C,T),(C,C)\}$$

$$\Pr(E \mid F) = \frac{\Pr(E \cap F)}{\Pr(F)} \qquad \begin{array}{l} E = \text{esce testa in entrambi i lanci} \\ F = \text{è uscito testa al primo lancio} \end{array}$$

$$\Pr(E \cap F) = \Pr(E) = \frac{1}{4}$$

$$\Pr(F) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Pr(E \mid F) = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{2} = \frac{1}{2}$$

Legge del prodotto

$$\Pr(E \mid F) = \frac{\Pr(E \cap F)}{\Pr(F)}$$

dunque

$$\Pr(E \cap F) = \Pr(F \cap E) = \Pr(F) \times \Pr(E \mid F)$$

Indipendenza

E ed *F* sono indipendenti se vale la seguente relazione:

$$\Pr(E \mid F) = \Pr(E)$$

e dunque

$$\Pr(E \cap F) = \Pr(E) \times \Pr(F)$$

Il teorema di Bayes

Uno dei cardini della teoria della probabilità soggettiva è il **Teorema di Bayes**, così chiamato dal nome suo inventore, il reverendo Thomas Bayes (1702-1761).

$$\Pr(H \mid E) = \frac{\Pr(H) \times P(E \mid H)}{P(E)}$$

Pr(*H*) =	probabilità **a priori** dell'ipotesi H
Pr(*H*|*E*) =	probabilità **a posteriori** dell'ipotesi *H* data l'evidenza *E*
Pr(*E*|*H*) =	probabilità **condizionata** che *E* si verifichi assumendo che l'ipotesi *H* sia vera
Pr(*E*) =	probabilità che *E* si verifichi sulla base della sola conoscenza di sfondo.

Esempio

$$\Pr(H \mid E) = \frac{\Pr(H) \times \Pr(E \mid H)}{\Pr(E)}$$

H = il paziente ha la malattia M
E = il paziente ha il sintomo S

Pr(*H*|*E*) = probabilità che il paziente abbia la malattia M se si osserva il sintomo S.

Pr(E|H) = probabilità che si osservi il sintomo E in un paziente che ha la malattia M.

Pr(H) = probabilità a priori che un individuo abbia la malattia M

Pr(E) = probabilità a priori che un individuo presenti il sintomo S (indipendentemente dal fatto che abbia o meno la malattia M)

Dimostrazione del teorema di Bayes

$$\Pr(E \cap H) = \Pr(E) \times \Pr(H \mid E).$$

$$\Pr(H \cap E) = \Pr(H) \times \Pr(E \mid H) \quad \text{e}$$

Ma $\Pr(E \cap H) = \Pr(H \cap E)$. Dunque:

$\Pr(E) \times \Pr(H \mid E) = \Pr(H) \times \Pr(E \mid H)$, per cui

$$\Pr(H \mid E) = \frac{\Pr(H) \cdot \Pr(E \mid H)}{\Pr(E)}$$

Esempio

- Riprendiamo l'esempio che abbiamo illustrato nella Lezione 1.
- Gianni è positivo al test per la malattia M. La frequenza della malattia M nella popolazione è dell'1%.
- L'affidabilità del test è del 99%, cioè il 99% dei malati risultano positivi e il 99% dei sani risultano negativi.
- Qual è la probabilità che Gianni abbia la malattia M?

Esempio

- H = Gianni ha la malattia M
- E = Gianni è risultato positivo al test
- Pr(H|E) = probabilità che Gianni sia malato dato che è risultato positivo al test = ???
- Pr(H) = probabilità **a priori** che Gianni sia malato = 0.01
- Pr(E|H) = probabilità che Gianni risulti positivo al test dato che ha la malattia M = 0.99.
- Pr(E) = probabilità che Gianni risulti positivo al test indipendentemente dal fatto che abbia o meno la malattia M =

= Pr(H e E) + Pr(non-H e E) =

= Pr(H) x Pr(E|H) + Pr(non-H) x Pr(E|non-H) =

= (0.01 x 0.99) + (0.99 x 0.01) = 0.0198

$$\Pr(H \mid E) = \frac{\Pr(H) \times \Pr(E \mid H)}{\Pr(E)} = \frac{0.01 \times 0.99}{0.0198} = \frac{0.0099}{0.0198} = 0.5$$

Esempio

- Se la frequenza della malattia nella popolazione fosse dell'1 per mille, avremmo
- Pr(H) = 0.001
- Pr(E|H) = 0.99 (come prima)
- Pr(E) =

  = Pr(H) x Pr(E|H) + Pr(non-H) x Pr(E|non-H) =

  = (0.001 x 0.99) + (0.999 x 0.01) = 0.01098

$$\Pr(H \mid E) = \frac{\Pr(H) \times \Pr(E \mid H)}{\Pr(E)} = \frac{0.001 \times 0.99}{0.01098} = \frac{0.00099}{0.01098} = 0.09$$

Spam filtering

- Molte parole hanno una determinata probabilità di ricorrere in una mail di spam (basti pensare alla parola "Viagra").
- I filtri anti-spam non conoscono questa probabilità e hanno bisogno di una fase di training in cui l'utente indica manualmente quali messaggi sono spam e quali no.

Spam filtering

- Consideriamo un messaggio che contiene la parola “viagra”.
- Dopo la fase di training, il filtro antispam può calcolare la probabilità che il messaggio sia spam usando il teorema di Bayes.
- A questo scopo può utilizzare come probabilità le frequenze osservate durante la fase di apprendimento.

Spam filtering

- Pr(S|V) = probabilità che un messaggio sia spam se contiene la parola “viagra”.
- Pr(S) = probabilità a priori che il messaggio sia spam.
- Pr(V|S) = probabilità che la parola “viagra” compaia in un messaggio di spam.
- Pr(V) = probabilità che la parola “viagra” compaia in un messaggio (spam o non spam)

Spam filtering

- A questo punto può essere applicato il teorema di Bayes per valutare la probabilità che un messaggio che contiene la parola "viagra" sia spam:

$$\Pr(S \mid V) = \frac{\Pr(S) \times P(V \mid S)}{P(V)}$$

Conclusioni

- Sebbene vi sia totale accordo sulle leggi matematiche del calcolo della probabilità non vi è alcun accordo sul significato preciso da attribuire alle assegnazioni di probabilità agli eventi incerti.
- L'idea di probabilità che emerge dalla definizione classica e da quella frequentista è quella secondo cui queste assegnazioni hanno un valore **oggettivo**: la probabilità di un evento è qualcosa di oggettivamente determinato che non dipende dal soggetto che la valuta.
- Tuttavia il campo di applicabilità di queste definizioni è molto limitato.

Conclusioni

- La definizione classica si applica solo alle situazioni incerte in cui siamo convinti che i casi possibili siano realmente **equiprobabili** (e dunque include una componente soggettiva).
- La definizione frequentista si applica solo alle situazioni incerte che possano essere descritte come "esperimenti casuali" che possono essere ripetuti indefinitamente **nelle stesse identiche condizioni**.
- Anche in questa valutazione c'è una componente soggettiva, visto che non possiamo sapere con certezza quali sono i fattori che veramente determinano l'esito di un esperimento.

Conclusioni

- Secondo la concezione soggettivista, basata sui lavori dell'Italiano Bruno de Finetti e dell'inglese Frank Ramsey, le probabilità oggettive **non esistono**.
- La probabilità che assegniamo a un evento riflette un nostro "stato mentale" che dipende, ma non è univocamente determinato, dalle informazioni a nostra disposizione.
- La probabilità che assegniamo a un evento riflette il nostro **grado di fiducia** nel verificarsi di quell'evento.
- Questo grado di fiducia soggettivo si rivela nella nostra disponibilità o indisponibilità ad accettare determinate **scommesse**.

Conclusioni

- Secondo la prospettiva soggettivista, l'unico vincolo che abbiamo nell'assegnare probabilità agli eventi è un vincolo di **coerenza**: non possiamo fare assegnazioni che violino le leggi del calcolo della probabilità.
- Se lo facessimo ci esporremmo a "scommesse olandesi", cioè sistemi di scommesse in cui andiamo incontro a una **perdita sicura**.
- Inoltre, se vogliamo comportarci in modo razionale, dobbiamo usare il **teorema di Bayes** per aggiornare le nostre valutazioni probabilistiche alla luce dei nuovi dati empirici che si rendono disponibili.

Conclusioni

- Sebbene la concezione soggettivista possa essere applicata a qualunque situazione incerta, con essa le assegnazioni di probabilità perdono qualunque significato oggettivo, e questo è per molti piuttosto difficile da accettare.
- Secondo il grande matematico italiano Bruno De Finetti che è stato uno dei più convinti sostenitori di questa concezione, quella soggettivista è l'unica interpretazione chiara e coerente del concetto di probabilità.
- In ogni caso, il fatto che non vi sia accordo sul significato preciso da attribuire alle previsioni probabilistiche spiega una buona parte delle controversie che emergono quando si fanno valutazioni di situazioni incerte da cui dipende il nostro benessere e a volte la nostra stessa vita.