CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE

Corso di Meccanica Analitica (a.a. 2009/2010 - II trimestre)

1 INTRODUZIONE

La legge fondamentale di Newton

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t),$$

rappresenta, dal punto di vista matematico, un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine. La sua soluzione è dunque la soluzione del problema deterministico del moto. Le caratteristiche geometriche della soluzione sono l'oggetto della cinematica del punto, di cui con queste brevi note si puntualizzano gli elementi essenziali, mediante esercizi e applicazioni. Nei paragrafi che seguiranno, saranno approfonditi i seguenti aspetti:

(§2) *il piú generico moto di un punto ha due caratteristiche che vanno distinte tra loro: la curva su cui avviene il moto (un supporto geometrico indipendente dal tempo) e la legge di evoluzione temporale su tale curva. Ciò si formalizza, rispettivamente, mediante la rappresentazione parametrica della curva e la legge oraria: in tal modo il moto descritto in termini di vettori è in un certo senso una generalizzazione del moto rettilineo uniforme. Al fine di ottenere la legge oraria, si stabilisce inoltre come calcolare la lunghezza di un arco di una curva.*

(§3) *La descrizione cinematica può essere particolarmente efficace in sistemi di riferimento diversi da quello che, per intenderci, consideriamo fisso in un laboratorio. Se si sceglie una terna ortogonale con l'origine coincidente col punto in moto, un asse sempre tangente alla curva del moto e gli altri assi opportunamente orientati, si verifica che i vettori velocità e accelerazione si decompongono in modo particolarmente significativo lungo questi assi. Inoltre, in questa descrizione del moto sono coinvolti esplicitamente i parametri che caratterizzano la geometria della curva su cui evolve il punto. Dal punto di vista puramente geometrico si sottolinea che l'equazione parametrica di una curva permette di ricavare le sue caratteristiche intrinseche (e viceversa).*

(§4) *Cambiare sistema di coordinate può semplificare la descrizione del moto o mettere in luce proprietà rilevanti. Qui sono trattati moti vincolati a un piano e si sottolinea l'opportunità di usare le coordinate polari nel (particolare ma importante) caso di moti centrali. Si applicano le equazioni di trasformazione sia alle grandezze cinematiche che alle equazioni.*

(§5) *L'opportunità o la necessità di utilizzare differenti sistemi di coordinate o anche osservatori in moto, richiede una teoria generale che fornisca le regole di trasformazione di tutte le grandezze cinematiche; in questo paragrafo si prova che quando due osservatori tra loro in moto relativo calcolano la derivata temporale di un vettore, ottengono in generale risultati differenti. In particolare, si applicano questi risultati ai vettori velocità e accelerazione.*

Si suppone che tutti gli osservatori abbiano orologi perfettamente sincronizzati tra di loro e che il tempo sia definito indipendentemente dall'osservatore (il tempo è assoluto); si assume che le leggi della Meccanica non dipendano dal luogo e dall'istante in cui vengono verificate (assioma dell'omogeneità del tempo e dello spazio), né dall'orientamento dei sistemi di riferimento usati (isotropia dello spazio). In base a tali postulati le equazioni di trasformazione delle coordinate spaziali e di quella temporale devono essere lineari.

Esempio 1.1: *Si supponga per assurdo che le misure di due orologi si trasformino l'una nell'altra tramite una relazione non lineare e si mostri che le conseguenze contraddicono l'ipotesi di omogeneità del tempo.*
Supponiamo che la relazione tra i tempi registrati dai due orologi sia quadratica: $t' = \lambda t^2$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Misuriamo dapprima un intervallo di tempo unitario tra gli istanti $t_1 = 2$ e $t_2 = 3$: l'osservatore che si avvale del secondo orologio dovrebbe misurare un intervallo

$$\lambda(3^2 - 2^2).$$

Se la stessa misura viene effettuata in un tempo successivo, diciamo tra gli istanti $t_3 = 4$ e $t_4 = 5$ al secondo osservatore deve venire attribuita una misura dell'intervallo di tempo pari a $\lambda(5^2 - 4^2)$: la misura dell'intervallo di tempo dipenderebbe allora dall'istante in cui viene effettuata.

2 ORBITA, TRAIETTORIA E CURVA PARAMETRIZZATA

Il punto materiale, durante un suo qualsiasi moto, descrive una curva nello spazio fisico. L'equazione che rappresenta l'evoluzione è data in termini vettoriali da

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \tag{2.1}$$

dove $\mathbf{x}$ è il vettore spostamento valutato rispetto ad una certa origine. Una volta assegnato un sistema di coordinate cartesiane, l'equazione finita del movimento è data da

$$\mathbf{x} = x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2 + x_3(t)\mathbf{e}_3; \tag{2.2}$$

la forma (2.2) dipende dal sistema di riferimento scelto.

Affermazioni del tipo: *la terra si muove su un'orbita ellittica* (1^a legge di Keplero) o *un proiettile descrive un'orbita parabolica*, non coinvolgono la coordinata temporale e non forniscono tutte le informazioni necessarie per descrivere l'**evoluzione temporale** del punto, a meno di non aggiungere ulteriori notizie nell'istante in cui la particella transita in ciascun punto della curva. Nel caso specifico del moto della terra dovremo tenere conto delle altre due leggi di Keplero. Conviene quindi usare una terminologia univoca che corrisponda alla reale conoscenza del moto. A tal fine useremo dunque i termini di

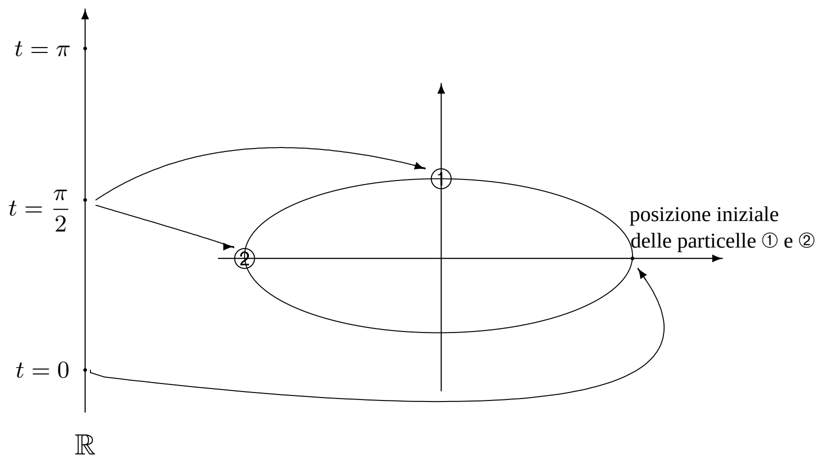
orbita per indicare il luogo dei punti dello spazio fisico su cui si svolge il moto. Per esempio, l'equazione cartesiana dell'orbita

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

indica che il punto si muove su un'ellisse di semiassi a e b;

traiettoria per indicare una curva parametrizzata dal tempo, cioè una funzione che a ogni istante di tempo associa un punto dell'orbita.

linea di universo per indicare una curva tracciata in uno spazio che ha anche una dimensione temporale. Per esempio, se una particella si muove su una circonferenza, la linea di universo giace su un cilindro. Se poi la particella impiega lo stesso tempo per percorrere archi della medesima lunghezza, la linea di universo è un'elica cilindrica di passo costante.



Per esempio, le funzioni

$$t \mapsto (a \cos t, b \sin t)$$
$$t \mapsto (a \cos 2t, b \sin 2t)$$

associano, ciascuna, a ogni istante di tempo le coordinate cartesiane di una particella. Le due particelle, diciamo ① e ②, si muovono sulla stessa orbita ma con differente velocità: se ① e ② partono nello stesso istante $t = 0$ e nella stessa posizione $(a, 0)$, dopo un lasso di tempo pari a $\pi/2$ si troveranno, rispettivamente, in $(0, b)$ e in $(-a, 0)$: il punto ② è *più veloce*.

Esempio 2.1: *La traiettoria di una particella è data dalla funzione vettoriale* $t \mapsto \mathbf{x} = (5t-1, 5t+1, t)$. *Si trovi l'orbita relativa a tale moto.*

Proprio perché l'orbita non contiene informazioni sull'evoluzione temporale, la sua equazione è ottenuta eliminando il tempo:

$$\begin{cases} x + y - 10z &= 0 \\ -x + y &= 2; \end{cases}$$

l'intersezione di questi due piani fornisce la retta su cui si svolge il moto.

Come abbiamo visto nell'esempio dell'orbita ellittica, i moti delle particelle ① e ② sono distinti perché lo sono le rispettive traiettorie (le curve parametrizzate dal tempo): le due particelle hanno in ciascun punto differenti e ben definite velocità. Viceversa, se a ciascun punto associamo la corrispondente velocità della particella, otteniamo un'esauriente descrizione del moto? La risposta è, sotto certe condizioni, affermativa. Consideriamo il seguente

Esempio 2.2: *Una particella si muove lungo una curva piana. Sapendo che la velocità, in ogni punto, è data da*

$$t \mapsto \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = -x_2\mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_2$$

si scrivano l'equazione del moto e l'orbita.
Il campo di velocità in questione non è uniforme, perché varia al variare di x_1 e x_2, ma è stazionario, in quanto la distribuzione dei vettori velocità nello spazio non dipende dal tempo. Si tratta di trovare quel vettore spostamento, in funzione del tempo, la cui derivata temporale uguagli istante per istante la velocità assegnata. È un problema di integrazione e si devono risolvere le equazioni differenziali: $\dot{x}_1 = -x_2$; $\quad \dot{x}_2 = x_1$; $\quad$ come si può verificare per sostituzione, la soluzione generale è

$$t \mapsto (C_1 \cos t + C_2 \sin t; C_1 \sin t - C_2 \cos t).$$

L'equazione dell'orbita, ottenuta eliminando il tempo, è $x_1^2 + x_2^2 = C_1^2 + C_2^2$, che rappresenta una famiglia di circonferenze con centro nell'origine e raggio $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Per selezionare una sola traiettoria e una sola orbita basta richiedere che ad un fissato istante, per es. quello iniziale, la particella transiti per un punto assegnato: se per $t = 0$ la particella è in $(1, 0)$, la legge del moto e l'orbita sono, rispettivamente,

$$t \mapsto (\cos t, \sin t); \qquad x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

Esempio 2.3: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *e* $\mathbf{c}$ *siano tre vettori fissi nello spazio. Sapendo che i primi due hanno uguale modulo* k *e sono tra loro perpendicolari, si determini l'orbita relativa alla legge del moto*

$$t \mapsto \mathbf{x}(t) = \mathbf{a}\cos t + \mathbf{b}\sin t + \mathbf{c}.$$

Si noti che, tenendo conto della perpendicolarità di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, $\| \mathbf{a}\cos t + \mathbf{b}\sin t \| = k$. Quindi, l'orbita del moto è una circonferenza di raggio k e centro individuato dal vettore $\mathbf{c}$

In effetti, nota la traiettoria $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ è nota la velocità in ogni istante: basta eseguire una derivata rispetto al tempo e si ha:

$$t \mapsto \dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}.$$

L'esempio 2.2. risolve invece il problema inverso, che è meno scontato: assegnato, come si dice, un **campo di velocità**, si vuole trovare quella curva che gli sia tangente.[1] La teoria delle equazioni differenziali pone precise condizioni affinché la soluzione esista, sia unica e abbia $\mathbb{R}^3$ come dominio.

Esempio 2.4: *Si trovi la traiettoria del moto di una particella che si muove su una retta, con accelerazione costante* $\mathbf{a}$.
Diversamente dal problema della determinazione delle curve integrali di un campo di velocità, qui abbiamo un procedimento di integrazione banale: essendo costante il vettore $\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{x}_1\mathbf{e}_1 + \ddot{x}_2\mathbf{e}_2 + \ddot{x}_3\mathbf{e}_3$, otteniamo, con una doppia integrazione rispetto al tempo,

$$\mathbf{x}(t) = \left(x_1(0) + \dot{x}_1(0)t + \ddot{x}_1\frac{t^2}{2}\right)\mathbf{e}_1 + \left(x_2(0) + \dot{x}_2(0)t + \ddot{x}_2\frac{t^2}{2}\right)\mathbf{e}_2 + \left(x_3(0) + \dot{x}_3(0)t + \ddot{x}_3\frac{t^2}{2}\right)\mathbf{e}_3$$

o, con opportuni simboli per le condizioni iniziali,

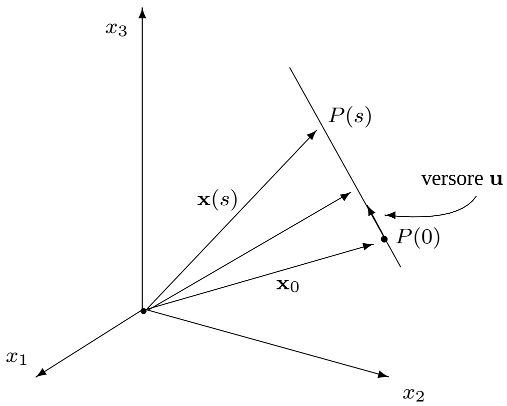
$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \dot{\mathbf{x}}_0 t + \ddot{\mathbf{x}}\frac{t^2}{2}. \tag{2.3}$$

Osserviamo che nell'equazione (2.3) i vettori $\dot{\mathbf{x}}_0 t$ e $\ddot{\mathbf{x}}t^2/2$,[2] cosí come la loro somma, hanno sempre la stessa direzione, quella della retta su cui avviene il moto; se $\mathbf{u}$ è il versore della retta, è evidente che una parametrizzazione piú semplice della retta è realizzata con la sostituzione:[3]

$$\dot{\mathbf{x}}_0 t + \ddot{\mathbf{x}}\frac{t^2}{2} = \mathbf{u}s, \tag{2.4}$$

dove s è, come il tempo, un parametro che varia con continuità su tutto $\mathbb{R}$ o su suoi sottoinsiemi.

[1] Questa curva è detta **curva integrale** del campo.
[2] $\dot{\mathbf{x}}_0$ è la velocità iniziale di un moto rettilineo; $\ddot{\mathbf{x}}$ è l'accelerazione costante di un moto rettilineo.
[3] che risulta ancor piú semplice se il moto rettilineo ha accelerazione variabile.



È abbastanza intuitivo che l'equazione

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}s$$

descriva una retta passante per il punto individuato dal vettore spostamento $\mathbf{x}_0$ e con direzione data dal versore $\mathbf{u}$: $\mathbf{x}_0$ è fisso e al variare continuo del parametro s, varia con continuità anche $\mathbf{u}s$; la regola del parallelogramma fornisce dunque $\mathbf{x}(s)$ che è un vettore la cui estremità individua, al variare di s tra $+\infty$ e $-\infty$, tutti i punti della retta. Se la retta fosse semplicemente l'asse delle x, l'equazione sarebbe

$$\mathbf{x} = (x_0 + x)\mathbf{e}_1$$

Esempio 2.5: *Si descriva la curva individuata da*

$$\lambda \mapsto \mathbf{x}(\lambda) = (3\lambda^2 + 2)\mathbf{e}_1 + (\lambda^2 - 4)\mathbf{e}_2 + (2\lambda^2 + 1)\mathbf{e}_3, \qquad \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

Riscrivendo l'equazione come $\qquad \mathbf{x}(\lambda) = (2\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) + \lambda^2(3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)$

si deduce che la curva è una semiretta uscente da $\mathbf{x}_0 = (2, -4, 1)$ con direzione $(3, 1, 2)$. Poiché il vettore

$$\mathbf{u} = \frac{3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3}{\sqrt{9 + 1 + 4}}$$

è di modulo unitario, scriviamo infine l'equazione della retta come $\quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + (\sqrt{14}\lambda^2)\mathbf{u}$.

Con questi ultimi esempi stiamo introducendo la **rappresentazione parametrica dell'orbita**: l'idea è quella di porre in relazione le curve (in quanto entità geometriche unidimensionali) con sottoinsiemi di una retta. Sulla retta varia con continuità un parametro che individua i punti sula curva: se il parametro è il tempo, il punto si muove sulla curva, e abbiamo la traiettoria, ma questo è solo un caso particolare. Con il termine di **curva parametrizzata** in $\mathbb{R}^3$, intenderemo una funzione *regolare*[1]

$$\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^3; \qquad \lambda \mapsto \mathbf{x}(\lambda)$$

I essendo un aperto di $\mathbb{R}$. Si definisce **parametro arco** il particolare parametro $\lambda = s$

$$s(t) = \int_0^t ||\dot{\mathbf{x}}(t)||dt. \tag{2.5}$$

Per capire intuitivamente il significato del parametro arco, si consideri un moto su una curva piana e si calcoli la lunghezza di un arco di curva infinitesima mediante il teorema di Pitagora:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2, \qquad \text{che equivale a:} \qquad ds = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2}dt,$$

dove la radice rappresenta il modulo della velocità che compare nella definizione (2.5). Integrando su un intervallo finito di tempo, si ottiene proprio la lunghezza dell'arco percorso. Se, inoltre, al tempo iniziale $t = 0$ si fa corrispondere $s = 0$ (l'origine degli archi), il parametro s rappresenta una vera e propria ascissa curvilinea, e misura il cammino percorso dal punto sulla curva.

Diremo inoltre che un cambio di parametro $\lambda \mapsto \theta = \theta(\lambda)$ che abbia i seguenti requisiti:

[1] nel senso che le componenti cartesiane $x_1(\lambda)$ etc. sono funzioni regolari (differenziabili con continuità) in I.

$$\theta(\lambda) \text{ è di classe } C^1; \qquad \frac{d\theta}{d\lambda} \neq 0,$$

porta a una rappresentazione parametrica **equivalente** di una data curva. Per esempio, è chiaro che il cambiamento di parametro (2.4) soddisfa tali requisiti. In particolare, sotto le precedenti condizioni è invariante per riparametrizzazione la lunghezza di un arco di curva:

$$\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} ||\dot{\mathbf{x}}(t)||dt = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left\| \frac{d\mathbf{x}(\lambda)}{d\lambda} \right\| d\lambda.$$

Tra tutti i parametri, t ed s rappresentano scelte particolari poiché nel primo caso la curva parametrizzata coincide con la traiettoria, nel secondo vale la proprietà

$$\left\| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right\| = 1. \tag{2.6}$$

Esempio 2.6: *Si consideri l'arco di iperbole $x_2^2 - x_1^2 = 1$ tra i punti $(0,1)$ e $(1,\sqrt{2})$. Si verifichi che una possibile rappresentazione parametrica della curva è data da:*

$$\mathbf{x}(\lambda) = \lambda \mathbf{e}_1 + \sqrt{\lambda^2+1}\mathbf{e}_2 \qquad \text{con } \lambda \in [0,1]$$

e si provi che cambiando il parametro tramite $\lambda = \sinh\theta$, con $\theta \in [0, \text{arcsinh}\, 1]$, si ha una rappresentazione parametrica equivalente. Si verifichi infine se ciascuno dei due parametri è il parametro arco per la curva in considerazione.

In effetti, sia eliminando λ dalla prima rappresentazione che eliminando θ da

$$\mathbf{x}(\theta) = \sinh\theta \mathbf{e}_1 + \cosh\theta \mathbf{e}_2 \qquad \text{con } \theta \in [0, \text{arcsinh}\, 1]$$

si ottiene il ramo d'iperbole richiesto; notiamo inoltre che

(a) $\lambda(\theta) = \sinh\theta$ è sicuramente di classe C^1;

(b) $\dfrac{d\lambda}{d\theta} = \cosh\theta > 0 \quad \forall\theta$

e il cambio di parametro è dunque ammissibile. Infine verifichiamo se è stato usato il parametro arco. Nel caso del parametro θ abbiamo che:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\theta} = \cosh\theta \mathbf{e}_1 + \sinh\theta \mathbf{e}_2 \Longrightarrow \left\| \frac{d\mathbf{x}}{d\theta} \right\| = \sqrt{\cosh 2\theta} \neq 1$$

e allora θ non può coincidere con il parametro arco.
Per ciò che concerne λ, si ha

$$s(\lambda) = \int_0^\lambda \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\lambda}\right)^2} d\lambda = \int_0^\lambda \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}} d\lambda$$

che sicuramente non fornisce una relazione lineare tra i parametri s e λ.

Esempio 2.7: *Si descriva un'elica cilindrica mediante il parametro arco*
In linea di principio, se l'elica ha un passo costante e la circonferenza di base ha raggio unitario, le equazioni parametriche hanno la forma

$$x_1 = \cos\lambda; \qquad x_2 = \sin\lambda; \qquad x_3 = h\lambda, \qquad\qquad h \in \mathbb{R}.$$

Dalle osservazioni precedentemente fatte, si ha che

$$s(\lambda) = \int_0^\lambda \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{d\lambda}\right)^2}\mathrm{d}\lambda = \sqrt{1+h^2}\lambda.$$

Di qui è facile sostituire nelle equazioni dell'elica s al posto di λ. Si noti che, cosí facendo,

$$\left|\left|\frac{d\mathbf{x}}{ds}\right|\right| = 1$$

Quando è nota la relazione

$$t \mapsto s = s(t)$$

si conosce la cosiddetta **legge oraria**. Essa non contiene tutte le informazioni sul moto; per ottenere l'equazione dell'evoluzione temporale dobbiamo inoltre conoscere su quale curva si svolge il moto:

$$\begin{cases} s = s(t) \\ \\ \mathbf{x} = \mathbf{x}(s) \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(s(t))$$

Esempio 2.8: *Si scrivano le equazioni del moto di un punto che si muove sulla retta di equazione $x_2 = mx_1 + q$, sapendo che la legge oraria è data da $t \mapsto s = \sqrt{1+m^2}t^2$.*
Per passare da una generica rappresentazione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda)$ a quella realizzata mediante s, si deve considerare che:

$$\frac{ds}{d\lambda} = \left|\left|\frac{d\mathbf{x}}{d\lambda}\right|\right| \Longrightarrow s = \int_0^\lambda \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{d\lambda}\right)^2}\mathrm{d}\lambda.$$

Nel caso in considerazione, scelto x_1 come parametro,

$$s = \int_0^{x_1} \sqrt{1+m^2}\mathrm{d}x_1 = \sqrt{1+m^2}x_1;$$

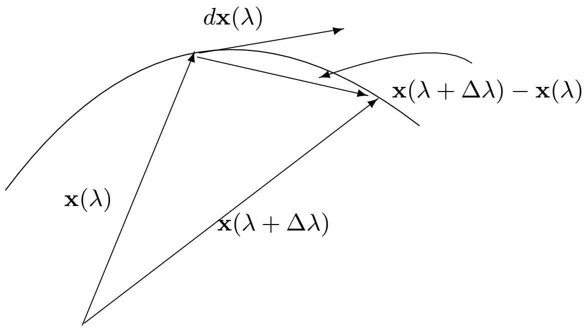
dunque, $$\mathbf{x}(s) = \frac{s}{\sqrt{1+m^2}}\mathbf{e}_1 + \left(\frac{ms}{\sqrt{1+m^2}} + q\right)\mathbf{e}_2 \Longrightarrow \mathbf{x}(t) = t^2\mathbf{e}_1 + (mt^2+q)\mathbf{e}_2.$$

Nel paragrafo seguente faremo uso della seguenti proprietà:

1. vettori costanti in modulo e le loro derivate sono vettori tra loro perpendicolari. Infatti,

$$\frac{d||\mathbf{x}(\lambda)||}{d\lambda} = 0 \Longrightarrow 0 = \frac{d}{d\lambda}(\mathbf{x}(\lambda)\cdot\mathbf{x}(\lambda)) \Longrightarrow \mathbf{x}(\lambda)\cdot\frac{d\mathbf{x}(\lambda)}{d\lambda} = 0$$

2. La derivata
$$\frac{d}{d\lambda}\mathbf{x}(\lambda)$$
è, in ogni punto della curva $\lambda \mapsto \mathbf{x}(\lambda)$ parametrizzata da λ, tangente alla curva.



Nell'ipotesi che $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda)$ sia una curva regolare, quando $\Delta\lambda \to 0$ il vettore $\Delta\mathbf{x}$ tende al vettore infinitesimo $d\mathbf{x}(\lambda)$, che risulta tangente alla curva.

3 LA TERNA INTRINSECA

Mediante il **versore tangente** $\mathbf{t} = \dfrac{d\mathbf{x}}{ds}$ la velocità è espressa come: $\dot{\mathbf{x}} = \dot{s}\mathbf{t}$, (essendo $\dot{s} = ||\dot{\mathbf{x}}||$). Inoltre si ha che
$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{R}\mathbf{n} \tag{3.1}$$
con $\mathbf{n}$ **versore normale**. La **terna intrinseca** è definita introducendo infine il **versore binormale** $\mathbf{b} := \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$. R è il raggio di curvatura[1] che si calcola tramite:
$$\frac{\mathbf{b}}{R} = \mathbf{t} \wedge \frac{\mathbf{n}}{R} = \mathbf{t} \wedge \frac{d\mathbf{t}}{ds} \Longrightarrow \frac{1}{R} = \left\| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \wedge \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \right\|.$$
È immediato vedere che per curve parametrizzate da $\lambda = \lambda(s)$
$$\frac{1}{R} = \frac{\left\| \dfrac{d\mathbf{x}}{d\lambda} \wedge \dfrac{d^2\mathbf{x}}{d\lambda^2} \right\|}{\left| \left(\dfrac{ds}{d\lambda} \right)^3 \right|},$$
e che nel caso di curve piane, dove si assume x_1 come parametro, e si usa la notazione $x_2' = \dfrac{dx_2}{dx_1}$,
$$\frac{1}{R} = \frac{|x_2''|}{\left| \left(1 + {x_2'}^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right|}.$$

[1] $R(s)$ rappresenta il raggio della circonferenza che, nel piano individuato da $\mathbf{t}$ e $\mathbf{n}$ e nel punto individuato da s sulla curva, meglio approssima la curva; sul cerchio di curvatura e sulla formula per ricavare il raggio, si veda il commento negli esercizi finali.

Esempio 3.1: *Scrivere le espressioni dei versori tangente e normale e del raggio di curvatura per l'ellisse*

$$x_1 = a\cos\lambda \qquad x_2 = b\sin\lambda.$$

Senza fare riferimento al parametro arco, sapendo che $\mathbf{t}$ è un versore ed è diretto come $d\mathbf{x}$,

$$\mathbf{t} = \frac{\frac{d\mathbf{x}}{d\lambda}}{\|\frac{d\mathbf{x}}{d\lambda}\|} = -\frac{a}{A}\sin\lambda\mathbf{e}_1 + \frac{b}{A}\cos\lambda\mathbf{e}_2, \qquad \text{essendo} \quad A = \sqrt{a^2\sin^2\lambda + b^2\cos^2\lambda}.$$

Inoltre, $$\frac{dA}{d\lambda} = \frac{a^2-b^2}{A}\sin\lambda\cos\lambda \Longrightarrow \frac{d\mathbf{t}}{d\lambda} = -\frac{ab}{A^3}(b\cos\lambda\mathbf{e}_1 + a\sin\lambda\mathbf{e}_2) \Longrightarrow \left\|\frac{d\mathbf{t}}{d\lambda}\right\| = \frac{ab}{A^2},$$

che permette infine di valutare $$\mathbf{n}(\lambda) = \frac{\frac{d\mathbf{t}}{d\lambda}}{\|\frac{d\mathbf{t}}{d\lambda}\|} = -\frac{b}{A}\cos\lambda\mathbf{e}_1 - \frac{a}{A}\sin\lambda\mathbf{e}_2.$$

Per calcolare il raggio di curvatura, notiamo preliminarmente che

$$\frac{ds}{d\lambda} = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\lambda}\right)^2} = \sqrt{a^2\sin^2\lambda + b^2\cos^2\lambda}$$

e che $$\frac{d\mathbf{x}}{d\lambda} \wedge \frac{d^2\mathbf{x}}{d\lambda^2} = (-a\sin\lambda\mathbf{e}_1 + b\cos\lambda\mathbf{e}_2) \wedge (-a\cos\lambda\mathbf{e}_1 - b\sin\lambda\mathbf{e}_2) = ab\mathbf{e}_3,$$

allora, dalla formula generale, abbiamo che $$\frac{1}{R} = \frac{ab}{(a^2\sin^2\lambda + b^2\cos^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}.$$

Esempio 3.2: *Si esprimano le derivate, rispetto al parametro arco, dei versori della terna intrinseca.*

(a) Tenendo conto della perpendicolarità tra ogni versore e la propria derivata, scriviamo che, in generale,

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}.$$

Conseguentemente,

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \wedge \mathbf{n} + \mathbf{t} \wedge \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \mathbf{t} \wedge (-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}),$$

vale a dire

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau\mathbf{n}. \tag{3.2}$$

(b) Alla luce di quest'ultima relazione, si ha anche che

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} \wedge \mathbf{b} = -\kappa\mathbf{t} \wedge \mathbf{b} = \kappa\mathbf{n} \Longrightarrow \frac{d(\mathbf{n} \wedge \mathbf{b})}{ds} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \wedge \mathbf{n} + \kappa\mathbf{n} \Longrightarrow \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa\mathbf{n}.$$

L'ultimo passaggio, tenuto conto della (3.1), implica che κ è il reciproco del raggio di curvatura.

Riassumendo, per le curve in $\mathbb{R}^3$ valgono le cosiddette **formule di Serret(-Frenet)**:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{R}\mathbf{n}; \qquad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\frac{1}{R}\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}; \qquad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau\mathbf{n}.} \tag{3.3}$$

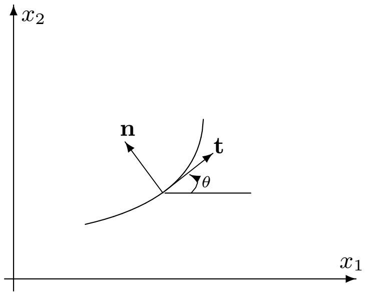
Le funzioni κ e τ che compaiono nelle formule di Serret forniscono, rispettivamente, la **curvatura** e la **torsione** della curva al variare del parametro s. Esse sono caratteristiche intrinseche della curva, cioè traducono proprietà geometriche indipendenti da ogni sistema di riferimento: la curvatura esprime di quanto (nell'intorno di ogni punto) la curva si discosta da un andamento rettilineo; la torsione misura di quanto l'andamento di una curva sghemba differisce da una curva che si mantiene nel piano osculatore. Esulano dai fini del corso l'illustrazione di queste ultime proprietà cosí come la dimostrazione della seguente importante:

PROPOSIZIONE: *una curva è definita univocamente tramite le proprie* **equazioni intrinseche**

$$\kappa = \kappa(s); \qquad \tau = \tau(s). \tag{3.4}$$

Anche il problema inverso, cioè quello di determinare l'equazione parametrica della curva a partire dall'equazione intrinseca, non viene trattato in questo corso. Esso non è di semplice soluzione, in quanto le formule di Serret diventano un sistema di equazioni differenziali che hanno come incognite i versori della terna intrinseca. Ma per fissare le idee analizziamo il seguente esempio che tratta di una curva piana, caso nel quale c'è sempre una soluzione standard in quanto una delle equazioni intrinseche è proprio $\tau(s) = 0$.

Esempio 3.3: *si trovi l'equazione parametrica della spirale logaritmica di equazioni intrinseche $R = s$ e $\tau = 0$.*



Essendo la curva piana, i versori $\mathbf{t}$ e $\mathbf{n}$ sono individuati, al variare di s, dall'angolo che formano con una direzione fissa, per esempio con l'asse x_1:
$\mathbf{t} = \cos\theta \mathbf{e}_1 + \sin\theta \mathbf{e}_2$
$\mathbf{n} = -\sin\theta \mathbf{e}_1 + \cos\theta \mathbf{e}_2$.

Le formule di Serret sono allora: $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds} = \dfrac{1}{s}\mathbf{n}; \quad \dfrac{d\mathbf{n}}{ds} = -\dfrac{1}{s}\mathbf{t}; \quad \dfrac{d\mathbf{b}}{ds} = 0,$

che, riscritte con l'introduzione di θ, divengono:

$$\frac{d\mathbf{t}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds} = (-\sin\theta \mathbf{e}_1 + \cos\theta \mathbf{e}_2)\frac{d\theta}{ds} = \mathbf{n}\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{s}\mathbf{n}$$

$$\frac{d\mathbf{n}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds} = -(\cos\theta \mathbf{e}_1 + \sin\theta \mathbf{e}_2)\frac{d\theta}{ds} = -\mathbf{t}\frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{s}\mathbf{t}.$$

Le due formule sono in questo caso equivalenti e si riducono entrambe a $\dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{1}{s}$; $\theta(s)$ è evidentemente la funzione logaritmo: se al valore iniziale della coordinata curvilinea $s = 1$ corrisponde $\theta = 0$, si ha $\theta = \ln s$. Ricaviamo ora l'equazione della curva, integrando $\mathbf{t} = \dfrac{d\mathbf{x}}{ds}$:

$$x_1 = \int_1^s (\cos\ln s)\mathrm{d}s + x_{01} = \frac{s}{2}(\sin\ln s + \cos\ln s) - \frac{1}{2} + x_{01};$$

$$x_2 = \int_1^s (\sin\ln s)\mathrm{d}s + x_{02} = \frac{s}{2}(\sin\ln s - \cos\ln s) + \frac{1}{2} + x_{02}.$$

Mediante la terna intrinseca si ottengono espressioni significative di **velocità** e **accelerazione**. Infatti, tenendo conto che

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\frac{d\mathbf{x}}{ds}\frac{ds}{dt};\qquad \ddot{\mathbf{x}}(t)=\frac{d}{dt}(\dot{s}\mathbf{t})=\ddot{s}\mathbf{t}+\dot{s}\frac{d\mathbf{t}}{ds}\frac{ds}{dt},$$

si ottengono le espressioni $\boxed{\dot{\mathbf{x}}(t)=\dot{s}\mathbf{t};\qquad \ddot{\mathbf{x}}(t)=\ddot{s}\mathbf{t}+\frac{\dot{s}^2}{R}\mathbf{n}}$

La velocità è sempre diretta come il versore tangente alla curva; l'accelerazione appartiene al piano osculatore alla curva: si noti che in nessun moto esiste una componente di $\ddot{\mathbf{x}}$ ortogonale al piano individuato da $\mathbf{t}$ e $\mathbf{n}$. Le componenti lungo tali versori sono dette accelerazione tangenziale e accelerazione normale. Un moto uniforme, per esempio, ha componente tangenziale dell'accelerazione uguale a zero. Problemi piú complessi si presentano quando non sono note esplicitamente l'equazione della curva e la legge oraria, ma relazioni da cui ricavarle, come nel seguente

Esempio 3.4: *due versori fissi $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ formano tra loro un angolo $\alpha\in(0,\pi)$. Il moto di una particella è tale che*

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{u}_1\wedge\mathbf{x}(t). \tag{3.5}$$

Sapendo che $\mathbf{x}(0)=\mathbf{u}_2$, si ricavi la legge del moto.
Derivando la (3.5) rispetto al tempo, si ha

$$\ddot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{u}_1\wedge\dot{\mathbf{x}}(t).$$

Questo significa che l'accelerazione è normale alla velocità, e che dunque la sua componente tangenziale è nulla:

$$\ddot{s}=0\Longrightarrow\dot{s}=\text{cost.}$$

Allora il moto è uniforme con rapidità pari a $\dot{s}=||\dot{\mathbf{x}}(0)||=||\mathbf{u}_1\wedge\mathbf{x}(0)||=\sin\alpha$; la legge oraria è

$$s=t\sin\alpha+s_0;$$

il raggio di curvatura è facilmente calcolato se si nota che, essendo $\mathbf{u}_1$ e $\dot{\mathbf{x}}$ tra di loro perpendicolari,

$$||\ddot{\mathbf{x}}||=||\mathbf{u}_1\wedge\dot{\mathbf{x}}||=||\dot{\mathbf{x}}||=\sin\alpha;$$

$$\text{dunque,}\quad \ddot{\mathbf{x}}=\frac{1}{R}\dot{s}^2\mathbf{n}\Longrightarrow\quad R=\sin\alpha.$$

Per ricavare la torsione, si moltiplichi vettorialmente l'espressione di $\ddot{\mathbf{x}}$ per $\mathbf{t}$:

$$\mathbf{t}\wedge\ddot{\mathbf{x}}=\sin\alpha\mathbf{t}\wedge\mathbf{n}=\sin\alpha\mathbf{b}\Longrightarrow\mathbf{t}\wedge(\mathbf{u}_1\wedge\dot{\mathbf{x}})=(\mathbf{t}\cdot\dot{\mathbf{x}})\mathbf{u}_1-(\mathbf{t}\cdot\mathbf{u}_1)\dot{\mathbf{x}}=||\dot{\mathbf{x}}||\mathbf{u}_1=\sin\alpha\mathbf{b}$$

in quanto $\mathbf{t}$ è perpendicolare a $\mathbf{u}_1$. Ne deduciamo che $\mathbf{b}$ coincide con $\mathbf{u}_1$, fisso per ipotesi e, di conseguenza,

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds}=0\Longrightarrow\tau=0.$$

La curva è piana, con raggio di curvatura costante; siccome il moto si svolge su un piano ortogonale a $\mathbf{b}$, $\mathbf{x}(0)$ e, dunque, $\mathbf{u}_2$ appartengono a tale piano. Allora, $\alpha=\frac{\pi}{2}$ e $R=1$ e la particella si muove di moto uniforme su una circonferenza di raggio unitario.

4 MOTI PIANI IN COORDINATE POLARI

La scelta di un sistema di coordinate piuttosto che un altro si rende opportuna quando essa permette di focalizzare una qualche poprietà specifica del moto: un buon esempio è già quello della terna intrinseca che è idonea a trattare le componenti tangenziali e normali delle grandezze cinematiche. Un'altra scelta è quella che coinvolge coordinate angolari: è il caso delle coordinate cilindriche e di quelle sferiche. Trattiamo nel dettaglio il primo caso, caratterizzato dalle seguenti equazioni di trasformazione delle coordinate cartesiane rettangolari:

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\theta \\ x_2 = \rho\sin\theta \\ x_3 = x_3 \end{cases} \tag{4.1}$$

Trasformiamo ora i vettori spostamento, velocità e accelerazione in base alle (4.1). Osserviamo intanto che, introducendo il versore

$$\mathbf{e}_\rho = \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2,$$

abbiamo, per il vettore spostamento,

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i\mathbf{e}_i = \rho(\cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2) + x_3\mathbf{e}_3 = \rho\mathbf{e}_\rho + x_3\mathbf{e}_3;$$

inoltre, se il terzo versore che definisce la nuova terna ortogonale è $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_\rho = -\sin\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2$, si ha

$$\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} = \dot\theta\mathbf{e}_\theta; \qquad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\dot\theta\mathbf{e}_\rho. \tag{4.2}$$

Poiché la derivata temporale di un generico vettore $\mathbf{w} = w_\rho\mathbf{e}_\rho + w_\theta\mathbf{e}_\theta + w_3\mathbf{e}_3$ è, con queste notazioni,

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = (\dot w_\rho - w_\theta\dot\theta)\mathbf{e}_\rho + (w_\rho\dot\theta + \dot w_\theta)\mathbf{e}_\theta + \dot w_3\mathbf{e}_3,$$

nel caso in cui $\mathbf{w}$ è il vettore spostamento e il vettore velocità, si ha, rispettivamente,

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot\rho\mathbf{e}_\rho + \rho\dot\theta\mathbf{e}_\theta + \dot x_3\mathbf{e}_3; \tag{4.3}$$

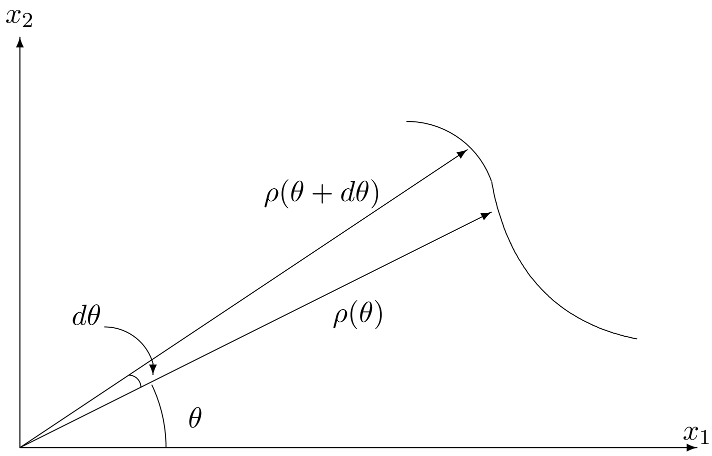
$$\ddot{\mathbf{x}} = (\ddot\rho - \rho\dot\theta^2)\mathbf{e}_\rho + (2\dot\rho\dot\theta + \rho\ddot\theta)\mathbf{e}_\theta + \ddot x_3\mathbf{e}_3. \tag{4.4}$$

I moti centrali sono caratterizzati dal fatto che $\ddot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{x} = 0$. Ciò implica che è costante il vettore $\mathbf{c} = (P - O) \wedge \dot{\mathbf{x}}$, O essendo il centro del moto e che, conseguentemente, il moto è piano (la direzione costante di $\mathbf{c}$ implica la giacitura costante del piano individuato dai vettori spostamento e velocità). Il modulo di $\mathbf{c}$ uguaglia il doppio della velocità areale che, espressa in coordinate polari, è $\dot A = \frac{1}{2}\rho^2\dot\theta$ (vedi figura).

Esempio 4.1: *In un moto centrale è nulla la componente trasversa dell'accelerazione.*
Infatti, derivando rispetto al tempo l'espressione della velocità areale, si ha

$$0 = \rho\dot\rho\dot\theta + \frac{1}{2}\rho^2\ddot\theta,$$

che implica l'annullarsi del coefficiente di $\mathbf{e}_\theta$ nella (4.4).



Per ogni valore di $\rho(\theta)$, a partire da $\rho(0)$, resta individuata l'area *spazzata* dal vettore spostamento che ipoteticamente giaceva all'istante iniziale sull'asse delle ascisse. In ambito infinitesimo, per una variazione $d\theta$ dell'angolo, si individua una porzione di piano che, al primo ordine di approssimazione (se la curva $\rho = \rho(\theta)$ è regolare), ha la stessa area di un settore circolare di raggio ρ e angolo al centro $d\theta$. Dunque, abbiamo

$$dA = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta.$$

Esempio 4.2: *Si mostri che non è centrale il moto piano di equazioni*

$$\ddot{\theta} = -\frac{1}{t^2} \qquad \text{e} \qquad \ddot{\rho} = \frac{\rho}{t^2}.$$

Con un'opportuna condizione iniziale, $\ddot{\theta} = -\frac{1}{t^2} \implies \dot{\theta} = \frac{1}{t}$; con tale condizione, $\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_\rho = 0$, e l'accelerazione si riduce a $\ddot{\mathbf{x}} = a_\theta \mathbf{e}_\theta$. Un moto con accelerazione radiale nulla è centrale se solo se è rettilineo ed uniforme: infatti, $a_\rho = 0$ implica che

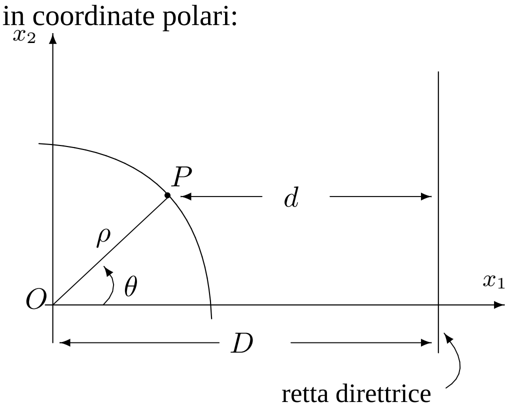
$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{2}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho^2\dot{\theta}}{2}\right)\mathbf{e}_\theta;$$

la condizione che la velocità areale sia costante implica quindi che $\ddot{\mathbf{x}} = 0$. Il moto deve quindi avvenire su una retta fissa nel piano $x_1 O x_2$ con velocità costante. Nel nostro esempio, l'integrazione della seconda equazione differenziale comporta che

$$\rho(t) = c_1 t^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + c_2 t^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

e che dunque non è costante la velocità areale $\quad \rho^2\dot{\theta} = c_1^2 t^{\sqrt{5}} + c_2^2 t^{-\sqrt{5}} + 2c_1c_2.$

Un ruolo fondamentale nei moti centrali è giocato dalle coniche. Discutiamo la loro rappresentazione in coordinate polari:



Una conica è il luogo dei punti con eccentricità

$$\epsilon = \frac{\rho}{d}$$

costante; questa relazione (tenendo conto che, dalla figura, $d = D - \rho\cos\theta$) implica che

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\epsilon D} + \frac{\cos\theta}{D}.$$

Se $\epsilon < 1$ la conica è un'ellisse (e se è $= 0$ è una circonferenza); per $\epsilon = 1$ abbiamo una parabola e per $\epsilon > 1$ un'iperbole.

Esempio 4.3: *Si consideri la curva di equazione* $\rho\cos^2\dfrac{\theta}{2} = a$, *con* $a \in \mathbb{R}^+$. *Si mostri che essa rappresenta una conica. Inoltre, si esprimano in funzione di* θ *le componenti radiale e trasversa della velocità di un punto che si muove su di essa in modo che* $\|\dot{\mathbf{x}}\| = k\rho, \qquad (k \in \mathbb{R})$.
La curva è una conica di eccentricità pari a 1. Infatti,

$$\frac{1+\cos\theta}{2}\rho = a \Longrightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2a} + \frac{\cos\theta}{2a}.$$

La condizione sul modulo della velocità è, in coordinate polari, $\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2 = k^2\rho^2$; derivando rispetto al tempo l'equazione della curva, si ricava

$$\dot\rho = \frac{2a\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2}\dot\theta = \frac{\rho\sin\theta}{1+\cos\theta}\dot\theta$$

e sostituirlo nella relazione precedentemente scritta;

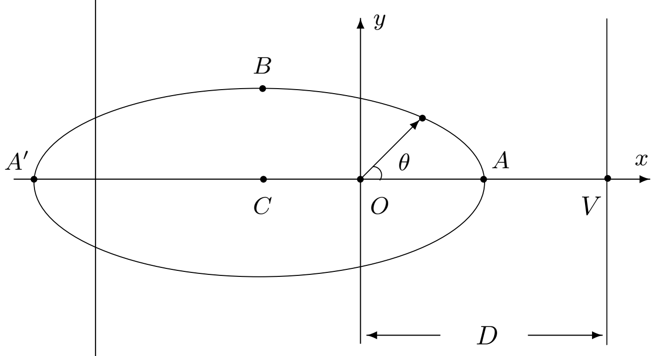
$$\frac{\sin^2\theta\dot\theta^2}{(1+\cos\theta)^2} + \dot\theta^2 = k^2 \Longrightarrow \dot\theta = k\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = k\sqrt{\frac{a}{\rho}}.$$

Conseguentemente,

$$v_\rho = \dot\rho = \frac{d\rho}{d\theta}\dot\theta = \frac{2ak\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2}\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}; \qquad v_\theta = \rho\dot\theta = \frac{a}{\cos^2\frac{\theta}{2}}k\cos\frac{\theta}{2} = \frac{ka}{\cos\frac{\theta}{2}}.$$

Si noti che $2\dot A = \sqrt{a}k\rho^{3/2}$, che non è costante durante il moto.

Esempio 4.4: *Relazioni tra i parametri caratteristici dell'ellisse.*



Indichiamo con a e b i semiassi dell'ellisse e con c la distanza OC tra fuoco e centro. Dall'equazione della conica derivata nel precedente esempio, si ha che:

$$OA = \frac{\epsilon D}{1+\epsilon}; \quad OA' = \frac{\epsilon D}{1-\epsilon} \Rightarrow 2a = \frac{2\epsilon D}{1-\epsilon^2}.$$

L'equazione dell'ellisse è allora:

$$\boxed{\rho = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\theta}}$$

- $c = a\epsilon$: infatti, dai precedenti risultati, $OA = a(1-\epsilon)$, e, dunque, $c = a - a(1-\epsilon)$.
- $c = \sqrt{a^2 - b^2}$: per dimostrare questa relazione, si noti che per $\theta = 0$

$$\epsilon = \frac{OA}{AV} = \frac{a(1-\epsilon)}{AV} \Rightarrow AV = \frac{a}{\epsilon}(1-\epsilon),$$

e, d'altra parte, $$\epsilon = \frac{OB}{CV} \Rightarrow OB = \epsilon\left(a + \frac{a}{\epsilon}(1-\epsilon)\right) = a,$$

da cui, applicando il teorema di Pitagora al triangolo BOC, si ottiene $a^2 = b^2 + c^2$

- $b = a\sqrt{1-\epsilon^2}$: per quanto visto sopra, tale relazione si ricava dalla $a^2 = b^2 + a^2\epsilon^2$.

Esempio 4.5: *L'equazione della traiettoria del moto piano di un punto è*

$$t \mapsto \mathbf{x}(t) = t\mathbf{e}_1 + t^2\mathbf{u},$$

dove $\mathbf{u}$ *è un versore che forma un angolo costante* $\alpha \in (0, \pi)$ *con l'asse* x_1*. Si determini:*
(a) l'orbita del moto; (b) le componenti intrinseche dell'accelerazione; (c) la velocità areale.

(a) In coordinate cartesiane, $\mathbf{x}(t) = t(1 + t\cos\alpha)\mathbf{e}_1 + t^2 \sin\alpha\mathbf{e}_2$; eliminando t si ottiene:

$$x_1 \sin\alpha - x_2 \cos\alpha = \sqrt{x_2 \sin\alpha},$$

che possiamo riscrivere nel sistema di coordinate cartesiane ruotate

$$X_1 = x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha; \qquad X_2 = -x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha,$$

come $X_1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} X_2^2 - X_2 \cot\alpha$, che è una parabola passante per l'origine, con asse parallelo all'asse X_1 e con vertice in $X_1 = -\dfrac{1}{4}\cos^2\alpha$; $X_2 = \dfrac{1}{4}\sin 2\alpha$.

(b) Dalla traiettoria deriviamo facilmente velocità e accelerazione:

$$\dot{\mathbf{x}} = (1 + 2t\cos\alpha)\mathbf{e}_1 + 2t\sin\alpha\mathbf{e}_2; \qquad \ddot{\mathbf{x}} = 2\cos\alpha\mathbf{e}_1 + 2\sin\alpha\mathbf{e}_2,$$

nonché $\dot{s} = ||\dot{\mathbf{x}}|| = \sqrt{1 + 4t^2 + 4t\cos\alpha}$; $\quad \ddot{s} = \dfrac{4t + 2\cos\alpha}{\sqrt{1 + 4t^2 + 4t\cos\alpha}}$.

Poiché il raggio di curvatura è dato da: $\dfrac{1}{R} = \dfrac{||\dot{\mathbf{x}} \wedge \ddot{\mathbf{x}}||}{\dot{s}^3} = \dfrac{||2\sin\alpha\mathbf{e}_3||}{(1 + 4t^2 + 4t\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}}$,

abbiamo, infine, $\ddot{\mathbf{x}} = \dfrac{4t + 2\cos\alpha}{\sqrt{1 + 4t^2 + 4t\cos\alpha}}\mathbf{t} + \dfrac{2\sin\alpha}{\sqrt{1 + 4t^2 + 4t\cos\alpha}}\mathbf{n}$.

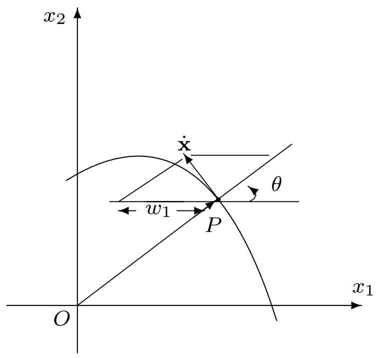
(c) Dalla relazione tra coordinate cartesiane e polari, nel presente caso si ha:

$$\begin{cases} \rho\cos\theta = t(1 + t\cos\alpha); \\ \rho\sin\theta = t^2 \sin\alpha \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \rho^2 = t^4 + t^2 + 2t^3\cos\alpha; \\ \theta = \arctan\dfrac{t\sin\alpha}{1 + t\cos\alpha} \end{cases}$$

$$\dot{\theta} = \sin\alpha(1 + t\cos\alpha)^2 + t^2\sin^2\alpha = \frac{\sin\alpha}{1 + t^2 + 2t\cos\alpha} \Longrightarrow \dot{A} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta} = \frac{t^2}{2}\sin\alpha.$$

Si noti che il moto non è centrale in quanto $\ddot{A} = t\sin\alpha \neq 0$.

Esempio 4.6: *Un punto P si muove in un piano x_1Ox_2. Indicando con w_1 e w_ρ, rispettivamente, le componenti della velocità di P lungo l'asse x_1 e lungo la direzione $(P-O)$, si esprima l'accelerazione di P mediante queste due componenti, le loro derivate temporali e le coordinate polari.*



In figura, le proiezioni w_1 e w_ρ sugli assi obliqui sono ottenute tracciando le parallele agli assi stessi (e sono dette componenti **controvarianti** del vettore velocità); si poteva, altrimenti, proiettare perpendicolarmente l'estremo della freccia di $\dot{\mathbf{x}}$ sulle due direzioni: i segmenti staccati sono le componenti **covarianti**.

Prima di tutto notiamo che il versore $\mathbf{e}_\theta$, perpendicolare a $\mathbf{e}_\rho$, si decompone secondo

$$\mathbf{e}_\theta = -\frac{\mathbf{e}_1}{\sin\theta} + \frac{\mathbf{e}_\rho}{\tan\theta};$$

inoltre, usando le componenti w_1 e w_ρ e la decomposizione appena effettuata,

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt}(\rho\mathbf{e}_\rho) = \dot\rho\mathbf{e}_\rho + \rho\dot\theta\mathbf{e}_\theta = -\frac{\rho\dot\theta}{\sin\theta}\mathbf{e}_1 + \left(\dot\rho + \frac{\rho\dot\theta}{\tan\theta}\right)\mathbf{e}_\rho = w_1\mathbf{e}_1 + w_\rho\mathbf{e}_\rho;$$

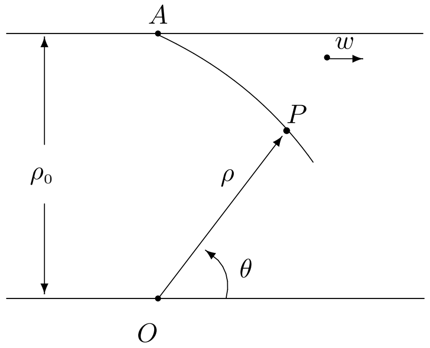
queste relazioni consentono di esprimere $\qquad \dot\theta = -\dfrac{w_1\sin\theta}{\rho}.$

L'accelerazione è allora:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot w_1\mathbf{e}_1 + \dot w_\rho\mathbf{e}_\rho - w_\rho w_1\frac{\sin\theta}{\rho}\mathbf{e}_\theta = \dot w_1\mathbf{e}_1 + \dot w_\rho\mathbf{e}_\rho + \frac{w_\rho w_1}{\rho}(\mathbf{e}_1 - \cos\theta\mathbf{e}_\rho) \Longrightarrow$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \left(\dot w_1 + \frac{w_1 w_\rho}{\rho}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\dot w_\rho - \frac{w_1 w_\rho}{\rho}\cos\theta\right)\mathbf{e}_\rho.$$

Esempio 4.7: *si valuti l'orbita $\rho=\rho(\theta)$ del moto illustrato in figura; si discuta se il moto è centrale; si discutano i casi particolari in cui $v=w$ e $v=3w$.*



Si supponga che tutti gli elementi di fluido di un fiume si muovano verso destra con velocità costante w; una barca P si muove da un punto A di una riva verso quella opposta con una velocità che, relativamente al moto della superficie del fiume, è di modulo costante v ed è costantemente diretta come $(O-P)$.

Facendo uso delle coordinate polari, si ha che:

$$v_\rho = \dot\rho = -v + w\cos\theta \tag{4.5}$$
$$v_\theta = \rho\dot\theta = -w\sin\theta \tag{4.6}$$

Poiché, tenendo conto della (4.6), si ha che $\dot\rho = \frac{d\rho}{d\theta}\dot\theta = -w\frac{\sin\theta}{\rho}\frac{d\rho}{d\theta}$, la (4.5) diventa:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\ln\rho) = \frac{v}{w\sin\theta} - \cot\theta.$$

Integrando per separazione di variabili, si ha allora:

$$\ln\rho - \ln\rho_0 = \frac{v}{w}\ln\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} - \ln\sin\theta \Longrightarrow \rho = \frac{\rho_0}{\sin\theta}\left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)^{\frac{v}{w}}.$$

Il moto non è centrale, in quanto, derivando rispetto al tempo la (4.6), si ha:

$$\dot\rho\dot\theta + \rho\ddot\theta = -w\dot\theta\cos\theta,$$

e aggiungendo ad entrambi i membri di quest'ultima il termine $\dot\rho\dot\theta$ si ottiene infine che

$$a_\theta = 2\dot\rho\dot\theta + \rho\ddot\theta = -w\dot\theta\cos\theta + w\dot\theta\cos\theta - v\dot\theta;$$

l'accelerazione trasversa è dunque diversa da zero, a meno il moto non avvenga lungo una retta fissa ($\dot\theta = 0$).
(a) Per quel che riguarda il caso $v = w$, notiamo che in tal caso l'orbita è data da

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} + \frac{\cos\theta}{\rho_0},$$

che rappresenta una conica per la quale ρ_0 è la distanza tra il polo e la retta direttrice: siccome in questo caso (vds. Es. 4.3) $\epsilon\rho_0 = \rho_0$, la conica è una parabola (con asse parallelo alle rive del fiume). Inoltre, dalle (4.5-6),

$$\rho\dot\theta = \frac{\rho_0}{1+\cos\theta}\dot\theta = -w\sin\theta \Longrightarrow dt = -\frac{\rho_0}{w}\frac{d\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}.$$

(b) Per $v = 3w$ l'equazione dell'orbita diviene: $\rho = \rho_0\frac{\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^3}$,

e sostituendo ρ nella (4.6), si ha (assumendo $\sin\theta \neq 0$):

$$\rho_0\frac{\sin\theta}{(1+\cos\theta)^3}\dot\theta = -w.$$

Da quest'ultima, otteniamo che:

$$-\frac{\rho_0}{w}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{\sin\theta \mathrm{d}\theta}{(1+\cos\theta)^3} = \int_0^t \mathrm{d}t, \quad \text{da cui:} \quad \frac{\rho_0}{2w}\left(1 - \frac{1}{(1+\cos\theta)^2}\right) = t$$

$$\Longrightarrow \cos\theta = -1 + \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_0 - 2wt}} \Longrightarrow \theta = \arccos\left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_0-2wt}} - 1\right).$$

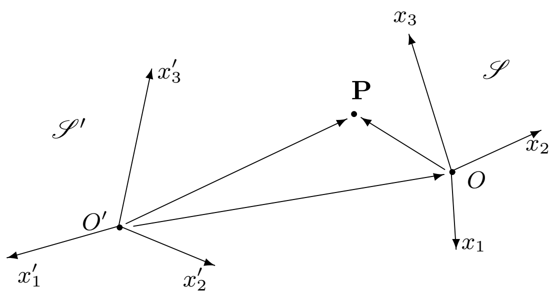
Infine, l'evoluzione temporale sarà completamente nota sostituendo nell'equazione dell'orbita la legge appena ricavata:

$$\rho = \rho_0\frac{2 - \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_0-2wt}}}{\frac{\rho_0}{\rho_0-2wt}},$$

con la quale, appunto, esprimiamo, accanto a $\theta = \theta(t)$, anche $\rho = \rho(t)$.

5 SISTEMI DI RIFERIMENTO IN MOTO RELATIVO

5.1 Velocità angolare tra due sistemi di riferimento



Ricordando che la trasformazione $x_i \longrightarrow x_i'$ deve essere lineare, la composizione degli spostamenti $(P - O') = (P - O) + (O - O')$ è, in coordinate,

$$x_i' = x_{0i}' + \sum_{k=1}^{3} a_{ik} x_k \tag{5.1}$$

dove le x_{0i}' individuano l'origine O rispetto a $\mathscr{S}'$.

Affinché i due osservatori $\mathscr{S}$ e $\mathscr{S}'$ misurino la stessa distanza tra due punti, la trasformazione dev'essere ortogonale ($A^T A = 1$), e di qui:

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \Longrightarrow \sum_{i,k} a_{ij} a_{ik} x_k = x_j$$

$\Longrightarrow \sum_{i,k,j} a_{ij} a_{ik} x_k \dot{a}_{lj} = \sum_j \dot{a}_{lj} x_j$ (dove le $\dot{a}_{lj}$ sono le derivate temporali degli elementi della matrice A).

Usando la (5.1), l'ultima relazione equivale a $\sum_{i,j} a_{ij} (x_i' - x_{0i}') \dot{a}_{lj} = \sum_j \dot{a}_{lj} x_j$.

Facciamo temporaneamente l'ipotesi che il punto P sia fisso in $\mathscr{S}$; conseguentemente:

$$\dot{x}_i' = \dot{x}_{0i}' + \sum_j \dot{a}_{ij} x_j \Longrightarrow \sum_{i,j} \dot{a}_{lj} a_{ij} (x_i' - x_{0i}') = \dot{x}_l' - \dot{x}_{0l}'.$$

Se, infine, introduciamo la matrice di elementi $\omega_{li} := \sum_j \dot{a}_{lj} a_{ij}$,

otteniamo la relazione

$$\dot{x}_l' = \dot{x}_{0l}' + \sum_i \omega_{li} (x_i' - x_{0i}'). \tag{5.2}$$

Esempio 5.1: *Si mostri che la matrice (ω_{ij}) è antisimmetrica.*
Derivando rispetto al tempo la condizione di ortogonalità di A, si ha:

$$\sum_i (\dot{a}_{ji} a_{ki} + a_{ji} \dot{a}_{ki}) = 0 \Longrightarrow \omega_{jk} + \omega_{kj} = 0.$$

dunque $$(\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Una matrice 3×3 antisimmetrica ha solo tre componenti indipendenti, proprio come un vettore di $\mathbb{R}^3$! Associamo allora alla matrice ω il vettore

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{32}\mathbf{e}_1 + \omega_{13}\mathbf{e}_2 + \omega_{21}\mathbf{e}_3,$$

e notiamo che, indicando con $\mathbf{w} = w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2 + w_3\mathbf{e}_3$ un generico vettore, vi sono due operazioni applicate ad esso che portano al medesimo risultato:

① Il prodotto della <u>matrice ω</u> per la matrice colonna associata a $\mathbf{w}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \iff$$

② Il prodotto vettoriale del <u>vettore $\boldsymbol{\omega}$</u> per $\mathbf{w}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{w} \;\; = \;\; & (\omega_{12}w_2 + \omega_{13}w_3)\mathbf{e}_1 + \\ & (-\omega_{12}w_1 + \omega_{23}w_3)\mathbf{e}_2 + \\ & (-\omega_{13}w_1 - \omega_{23}w_2)\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

<u>Definizione</u>: il vettore $\boldsymbol{\omega}$ così introdotto è detto **velocità angolare** del sistema $\mathscr{S}$ rispetto a $\mathscr{S}'$.

Mediante il vettore $\boldsymbol{\omega}$ possiamo riscrivere la (5.2) in termini vettoriali:

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}}' = \dot{\mathbf{x}}'_0 + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O).} \tag{5.3}$$

Al di là del problema specifico dei moti relativi dei sistemi di riferimento, la (5.3), in generale, esprime la velocità di un punto P una volta che è nota quella di un punto O rispetto a cui P è fermo.

Un caso particolare della (5.3) è quello in cui $(P - O) = \mathbf{e}_1$:

$$\left[\frac{d(P-O)}{dt}\right]' = \dot{\mathbf{x}}' - \dot{\mathbf{x}}'_0 \Longrightarrow \left(\frac{d\mathbf{e}_1}{dt}\right)' = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_1, \tag{5.4}$$

dove, sottolineiamo, l'apice significa che la derivata è eseguita da $\mathscr{S}'$.

<u>Osservazione</u>. I versori dei due sistemi di riferimento, per esempio $\mathbf{e}'_1$ ed $\mathbf{e}_1$, formano angoli variabili durante il moto relativo:

$$\mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \cos\phi, \qquad \phi = \phi(t).$$

La derivata temporale <u>rispetto a $\mathscr{S}'$</u> di questa espressione è:

$$\mathbf{e}'_1 \cdot \left(\frac{d\mathbf{e}_1}{dt}\right)' = -\sin\phi\dot{\phi}.$$

Se introduciamo un versore $\mathbf{u}$ sempre perpendicolare a $\mathbf{e}'_1$ ed $\mathbf{e}_1$, di modo che $\mathbf{e}'_1 \wedge \mathbf{e}_1 = \sin\phi\mathbf{u}$, e teniamo conto della (5.4), abbiamo che:

$$\mathbf{e}'_1 \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_1) = -\sin\phi\dot{\phi} \Longrightarrow \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{e}'_1 \wedge \mathbf{e}_1) = \sin\phi\dot{\phi} \Longrightarrow \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u} = \dot{\phi}.$$

Se $\boldsymbol{\omega}$ è parallela a $\mathbf{u}$, il suo modulo uguaglia proprio la rapidità con cui varia l'angolo ϕ: ciò motiva l'uso del termine *velocità angolare*. D'altra parte, tornando a come abbiamo introdotto la matrice $\omega = \dot{A}A^T$, è evidente che se le orientazioni relative dei due sistemi di riferimento (i coseni direttori, per esempio) non cambiano nel tempo, $\dot{A} = 0$ e i due sistemi *traslano* uno rispetto all'altro.

Esempio 5.2: *Si mostri che la velocità angolare di $\mathscr{S}'$ rispetto a $\mathscr{S}$ è $-\boldsymbol{\omega}$.*
Tornando al legame tra velocità angolare e moto rotatorio tra i due sistemi, abbiamo che se consideriamo fisso $\mathscr{S}$, e indichiamo con $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ la velocità angolare di $\mathscr{S}'$,

$$-\sin\phi\dot{\phi} = \mathbf{e}_1 \cdot \left(\frac{d\mathbf{e}'_1}{dt}\right) = \mathbf{e}_1 \cdot (\tilde{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{e}'_1);$$

confrontando con quanto dedotto nella precedente osservazione, e tenuto conto dell'antisimmetria del prodotto vettoriale, si ha che deve essere: $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega}$.

5.2 Legge di trasformazione della derivata temporale di un vettore

Come si è visto, è essenziale specificare rispetto a quale osservatore si eseguono le derivate di un vettore. La (5.3) ci permette di ricavare una legge generale per trasformare le derivate di $\mathscr{S}$ in quelle di $\mathscr{S}'$: se $\mathbf{w} = \sum_i w_i \mathbf{e}_i$ è un vettore generico (che non ha componenti costanti in $\mathscr{S}$!) la sua derivata fatta rispetto a $\mathscr{S}$ (con versori $\mathbf{e}_i$ fissi) è:

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \sum_i \frac{dw_i}{dt}\mathbf{e}_i,$$

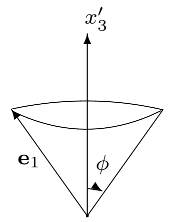
mentre quella rispetto a $\mathscr{S}'$ è:

$$\left(\frac{d\mathbf{w}}{dt}\right)' = \sum_i \frac{dw_i}{dt}\mathbf{e}_i + \sum_i w_i \left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt}\right)'.$$

Quindi, usando la (5.4),

$$\left(\frac{d\mathbf{w}}{dt}\right)' = \left(\frac{d\mathbf{w}}{dt}\right) + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{w}. \tag{5.5}$$

Esempio 5.3: *Un sistema di riferimento $\mathscr{S}$ ruota con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = t\mathbf{e}'_3$ rispetto a $\mathscr{S}'$. Sapendo che le origini dei due sistemi si mantengono coincidenti, si determini la velocità e l'accelerazione del punto individuato da $(P - O) = \mathbf{e}_1$.*



Poiché, applicando le precedenti considerazioni sulla velocità angolare, e tenendo conto che quest'ultima è parallela all'asse x'_3,

$$-\sin\phi\dot{\phi} = \mathbf{e}'_3 \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_1) = 0;$$

ciò significa che $\dot{\phi} = 0$ e che dunque $\mathbf{e}_1$ forma un angolo ϕ costante con l'asse x'_3: l'estremità del versore $\mathbf{e}_1$ descrive una circonferenza di raggio $||\mathbf{e}_1|| \sin\phi = \sin\phi$.

La velocità di P è, per $\mathscr{S}'$,

$$\dot{\mathbf{x}}' = \left(\frac{d\mathbf{e}_1}{dt}\right)' = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_1 = t\mathbf{e}'_3 \wedge \mathbf{e}_1;$$

con questa relazione possiamo ricavare la legge oraria: infatti,

$$\dot{s} = ||\dot{\mathbf{x}}'|| = t\sin\phi \Longrightarrow s = \frac{1}{2}t^2 \sin\phi.$$

Allora, abbiamo la piú completa informazione sul moto, in quanto conosciamo legge oraria e orbita, quest'ultima essendo la circonferenza di equazioni parametriche

$$x_1' = \sin\phi \cos\frac{s}{\sin\phi}; \qquad x_2' = \sin\phi \sin\frac{s}{\sin\phi}; \qquad x_3' = \cos\phi.$$

La traiettoria è dunque data da:

$$x_1' = \sin\phi \cos\frac{t^2}{2}; \qquad x_2' = \sin\phi \sin\frac{t^2}{2}; \qquad x_3' = \cos\phi.$$

La velocità e l'accelerazione si ottengono con una semplice derivazione:

$$\dot{\mathbf{x}}' = \left(-t\sin\phi\sin\frac{t^2}{2}\right)\mathbf{e}_1' + \left(t\sin\phi\cos\frac{t^2}{2}\right)\mathbf{e}_2';$$

$$\ddot{\mathbf{x}}' = \left(-\sin\phi\sin\frac{t^2}{2} - t^2\sin\phi\cos\frac{t^2}{2}\right)\mathbf{e}_1' + \left(\sin\phi\cos\frac{t^2}{2} - t^2\sin\phi\sin\frac{t^2}{2}\right)\mathbf{e}_2'.$$

Se eventualmente si vuole esprimere l'accelerazione rispetto alla terna intrinseca, tenendo conto che il moto avviene nel piano $x_3 = \cos\phi$, che $\ddot{s} = \sin\phi$, e che il raggio di curvatura è $\sin\phi$, si ha che

$$\ddot{\mathbf{x}}' = \sin\phi\mathbf{t} + t^2\sin\phi\mathbf{n}.$$

5.3 Cinematica relativa

Nella (5.3) il punto P è considerato fisso rispetto ad O: è *trascinato* da $\mathscr{S}$ nel suo moto. Indichiamo ora con $\dot{\mathbf{x}}_s$ tale **velocità di trascinamento** e consideriamo il caso piú generale in cui P ha anche un moto relativo rispetto a $\mathscr{S}$. Facendo uso della (5.5) si ha, per la velocità del punto rispetto a $\mathscr{S}'$,

$$\dot{\mathbf{x}}' = \left[\frac{d}{dt}(P-O')\right]' = \left[\frac{d}{dt}(P-O)\right]' + \left[\frac{d}{dt}(O-O')\right]' = \left[\frac{d}{dt}(P-O)\right] + \boldsymbol{\omega}\wedge(P-O) + \dot{\mathbf{x}}_0'.$$

Indichiamo con $\dot{\mathbf{x}}_r$ la **velocità relativa** di P rispetto a $\mathscr{S}$, e scriviamo infine la **legge di composizione delle velocità**:

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}}' = \dot{\mathbf{x}}_r + \dot{\mathbf{x}}_s.} \tag{5.6}$$

L'accelerazione di P rispetto all'osservatore $\mathscr{S}'$, è valutata da quest'ultimo derivando la (5.6) rispetto al tempo:

$$\ddot{\mathbf{x}}' = \left[\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{x}}_r + \dot{\mathbf{x}}_s)\right]' = \frac{d\dot{\mathbf{x}}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega}\wedge\dot{\mathbf{x}}_r + \left(\frac{d\dot{\mathbf{x}}_s}{dt}\right)' =$$
$$\frac{d\dot{\mathbf{x}}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega}\wedge\dot{\mathbf{x}}_r + \left(\frac{d\dot{\mathbf{x}}_0'}{dt}\right)' + \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)'\wedge(P-O) + \boldsymbol{\omega}\wedge\left[\frac{d}{dt}(P-O)\right]' =$$
$$\frac{d\dot{\mathbf{x}}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega}\wedge\dot{\mathbf{x}}_r + \ddot{\mathbf{x}}_0' + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\wedge(P-O) + \boldsymbol{\omega}\wedge[\dot{\mathbf{x}}_r + \boldsymbol{\omega}\wedge(P-O)]$$

(si noti che la (5.5) implica che la derivata temporale di $\boldsymbol{\omega}$ è uguale nei due sistemi). Se adesso indichiamo, rispettivamente, con

$$\ddot{\mathbf{x}}_r = \frac{d\dot{\mathbf{x}}_r}{dt}; \qquad \ddot{\mathbf{x}}_s = \ddot{\mathbf{x}}_0' + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\wedge(P-O) + \boldsymbol{\omega}\wedge[\boldsymbol{\omega}\wedge(P-O)]; \qquad \ddot{\mathbf{x}}_c = 2\boldsymbol{\omega}\wedge\dot{\mathbf{x}}_r$$

le accelerazioni **relativa**, **di trascinamento** e di **Coriolis**, otteniamo la **legge di composizione delle accelerazioni**

$$\boxed{\ddot{\mathbf{x}}' = \ddot{\mathbf{x}}_r + \ddot{\mathbf{x}}_s + \ddot{\mathbf{x}}_c.} \tag{5.7}$$

Le (5.6) e (5.7) permettono di trasformare velocità e accelerazione passando da un sistema di riferimento ad un altro, in moto generico rispetto al primo.

Esempio 5.4: *Una particella si muove su un'elica cilindrica. L'asse x_3 di un osservatore $\mathscr{S}$ è diretto come la generatrice del cilindro. Sapendo che la legge oraria che $\mathscr{S}$ determina per tale moto è $s = \frac{1}{2}t^2$, si calcoli la velocità della particella rispetto ad un osservatore $\mathscr{S}'$ che trasla con accelerazione costante rispetto ad $\mathscr{S}$ mantenendo l'asse x_3' coincidente con x_3.*
Ricordando i risultati ottenuti nell'esempio 3.3, si ha che l'osservatore $\mathscr{S}$ perviene alla seguente traiettoria:

$$\mathbf{x}(t) = r\cos\frac{t^2}{2\sqrt{r^2+h^2}}\mathbf{e}_1 + r\sin\frac{t^2}{2\sqrt{r^2+h^2}}\mathbf{e}_2 + \frac{ht^2}{2\sqrt{r^2+h^2}}\mathbf{e}_3,$$

dove r e h sono le costanti caratteristiche dell'elica. La velocità relativa a tale osservatore è allora

$$\dot{\mathbf{x}}_r = -\frac{rt}{\sqrt{r^2+h^2}}\sin\frac{t^2}{2\sqrt{r^2+h^2}}\mathbf{e}_1 + \frac{rt}{\sqrt{r^2+h^2}}\cos\frac{t^2}{2\sqrt{r^2+h^2}}\mathbf{e}_2 + \frac{ht}{\sqrt{r^2+h^2}}\mathbf{e}_3;$$

la velocità di trascinamento è dovuta al fatto che l'origine O di $\mathscr{S}$ trasla con accelerazione costante a: se inizialmente O era in quiete, essa può essere espressa come:

$$\dot{\mathbf{x}}_s = at\mathbf{e}_3'.$$

Per avere la velocità richiesta, basta applicare la (5.6); si noti che la velocità di trascinamento incide solo sulla terza componente e che la legge oraria fornita dall'osservatore $\mathscr{S}'$ non differisce sostanzialmente da quella di $\mathscr{S}$, in quanto

$$\dot{s}' = ||\dot{\mathbf{x}}'|| = t\sqrt{1 + a^2 + \frac{2ha}{\sqrt{r^2+h^2}}}.$$

Esempio 5.5: *Cosí come la traiettoria e la legge oraria, anche l'orbita è relativa all'osservatore che ne formula l'equazione.*
Si consideri il caso di un osservatore $\mathscr{S}$ per il quale un punto si muove sulla circonferenza $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ e, per fissare le idee, il moto sia uniforme.. Un secondo osservatore $\mathscr{S}'$ si muove con velocità costante lungo l'asse x_3: per esso l'orbita è un elica cilindrica: la sua equazione è ricavabile eliminando il tempo dalle

$$x_1' = r\cos\omega t; \quad x_2' = r\sin\omega t; \quad x_3' = kt.$$

Esempio 5.6: *Si discuta un caso in cui due osservatori $\mathscr{S}'$ e $\mathscr{S}$ pervengono a leggi orarie distinte.*
Si consideri il semplice caso di due sistemi di riferimento, con origini e assi x_3 e x'_3 coincidenti, il primo dei quali, diciamo $\mathscr{S}'$, ruota con velocità angolare $-\omega(t)\mathbf{e}_3$ rispetto al secondo ($\mathscr{S}$). Un punto si muove su una circonferenza $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ (equivalente a ${x'}_1^2 + {x'}_2^2 = r^2$) con un'assegnata legge oraria $s = s(t)$ rispetto a $\mathscr{S}$. Derivando l'equazione della traiettoria, si ottiene dunque la velocità relativa a $\mathscr{S}$:

$$\dot{\mathbf{x}}_r = -\dot{s}\sin\frac{s(t)}{r}\mathbf{e}_1 + \dot{s}\cos\frac{s(t)}{r}\mathbf{e}_2.$$

La velocità di trascinamento è

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \boldsymbol{\omega}\wedge(P-O) = \omega\mathbf{e}_3 \wedge r(\cos\frac{s}{r}\mathbf{e}_1 + \sin\frac{s}{r}\mathbf{e}_2) = \omega r(-\sin\frac{s}{r}\mathbf{e}_1 + \cos\frac{s}{r}\mathbf{e}_2);$$

si noti che la (5.6) è indipendente dalle coordinate. In generale, la scelta di decomporre le varie velocità rispetto a un sistema piuttosto che all'altro, dipende dalle circostanze: qui la scelta è indifferente. Infatti, per ottenere $\dot{s}'$, si deve valutare il modulo di:

$$\dot{\mathbf{x}}' = \dot{\mathbf{x}}_r + \dot{\mathbf{x}}_s = -(\dot{s}+r\omega)\sin\frac{s}{r}\mathbf{e}_1 + (\dot{s}+r\omega)\cos\frac{s}{r}\mathbf{e}_2,$$

e un modulo è indipendente dal sistema di coordinate prescelte. Ricaviamo infine:

$$\dot{s}' = ||\dot{\mathbf{x}}'|| = \dot{s} + r\omega,$$

che, a seconda di come si sceglie $\omega = \omega(t)$, porta a differenti leggi orarie $s' = s'(t)$.

Esempio 5.7: *Si costruisca un moto relativo in cui siano nulle le accelerazione di trascinamento e di Coriolis, benché la velocità angolare tra i due osservatori sia diversa da zero..*
Per annullare $\ddot{\mathbf{x}}_s$, è sufficiente, per esempio, che

1. O si muova di moto rettilineo uniforme rispetto a $\mathscr{S}'$;
2. che $(P-O)$ sia parallelo a $\boldsymbol{\omega}$ e a $\dot{\boldsymbol{\omega}}$;
3. la velocità di P sia parallela a $(P-O)$.

Supponiamo allora che $\mathscr{S}'$ e $\mathscr{S}$ abbiano una comune origine ($\dot{\mathbf{x}}_O = 0$), che il punto P si muova sull'asse Ox_3 con legge $\mathbf{x}(t) = x_3(t)\mathbf{e}_3$
e che la velocità angolare di $\mathscr{S}$ rispetto a $\mathscr{S}'$ sia $\boldsymbol{\omega} = f(t)\mathbf{e}_3$. In tal caso, abbiamo che

$$\boldsymbol{\omega}\wedge(P-O) = f(t)\mathbf{e}_3 \wedge x_3(t)\mathbf{e}_3 = 0, \qquad \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\wedge(P-O) = \dot{f}(t)\mathbf{e}_3 \wedge x_3(t)\mathbf{e}_3 = 0$$

Siccome, inoltre, $\left(\frac{\mathbf{e}_3}{dt}\right)' = \boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{e}_3 = 0$, segue che l'asse Ox_3 è fisso anche in $\mathscr{S}'$. In questo senso l'esempio è artificioso, in quanto la rotazione degli assi Ox_1 e Ox_2 non influenza in alcun modo la descrizione del moto del punto.

6 Esercizi vari

1. *Si caratterizzi la terna intrinseca di una curva piana di equazione*

$$y = f(x).$$

Nel presente caso è possibile (e conveniente) usare la variabile indipendente x come parametro della curva. Formalizzando,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{d\mathbf{x}}{dx} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siccome per una curva piana il legame tra il parametro arco e l'ascissa è dato da

$$ds = \sqrt{1 + f'^2}dx,$$

si ha che il versore tangente è

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{dx}\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per quel che riguarda il versore normale, ricordando l'espressione del raggio di curvatura R,

$$\mathbf{n} = R\frac{d\mathbf{t}}{dx}\frac{dx}{ds} = \frac{\left|(1+f'^2)^{3/2}\right|}{|f''|} \left[-\frac{f'f''}{(1+f'^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ f''(x) \\ 0 \end{pmatrix} \right] \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}$$

$$= \frac{|(1+f'^2)|}{|f''|} \frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}} \frac{1}{1+f'^2} \begin{pmatrix} -f' \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Indicando con $\text{sign}(f'')$ il segno della derivata seconda, si può ulteriormente semplificare l'espressione:

$$\mathbf{n} = \frac{\text{sign}(f'')}{\sqrt{1+f'^2}} \begin{pmatrix} -f' \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il terzo versore deve avere ovviamente la direzione dell'asse delle z, come si può direttamente verificare:

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} = \frac{\text{sign}(f'')}{1+f'^2} \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & f' & 0 \\ -f' & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{sign}(f'')\mathbf{k}.$$

2. *Si scrivano i versori tangente e normale nell'origine del sistema di riferimento Oxy per la parabola di equazione*

$$y = -x^2.$$

Usando i risultati dell'esercizio precedente, si ottiene facilmente che, in ogni punto della parabola,

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2x \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{n} = -\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

essendo $\text{sign}(y'') = -1$. In particolare, nell'origine ($x = 0$)

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{n} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{j}$$

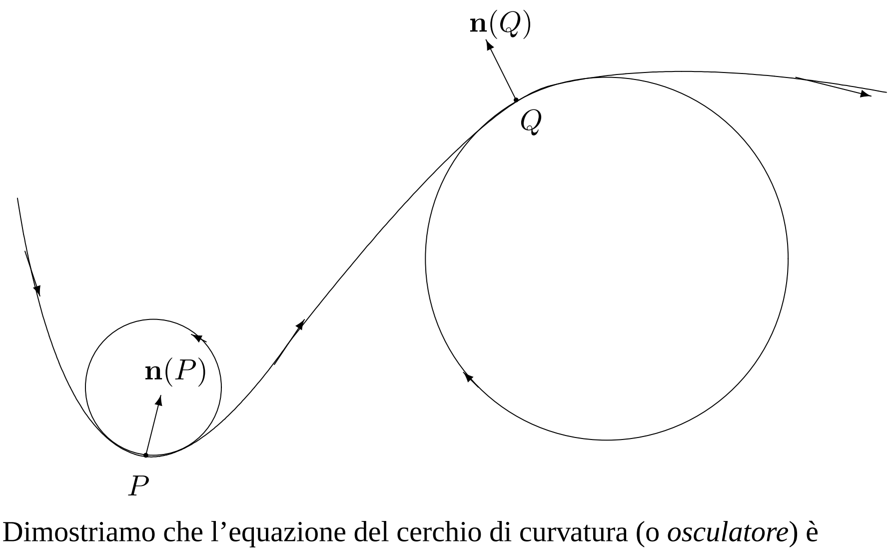
3. *Si caratterizzi il cerchio di curvatura in un punto di una curva; si scriva la formula del raggio di curvatura quando la curva è parametrizzata dal parametro arco*

   In ogni punto P di una curva (con curvatura diversa da zero) esiste un unico cerchio di curvatura che:

   - è tangente alla curva in P;
   - è orientato come la curva (il versore normale in P è lo stesso per curva e cerchio);
   - il cui raggio coincide con il raggio di curvatura della curva.

   La prima condizione dice che il centro del cerchio giace sulla normale alla curva. La seconda dice che $\mathbf{n}(P)$ punta verso il centro del cerchio se la curvatura è maggiore di zero, in verso opposto se la curvatura è minore di zero. Si ricordi che la curvatura ha un segno, mentre il raggio è definito positivo:

$$\frac{1}{R} = |k|.$$



   Dimostriamo che l'equazione del cerchio di curvatura (o *osculatore*) è

$$||\mathbf{x} - \mathbf{x}_P - \mathbf{n}_P R_P||^2 = R_P^2$$

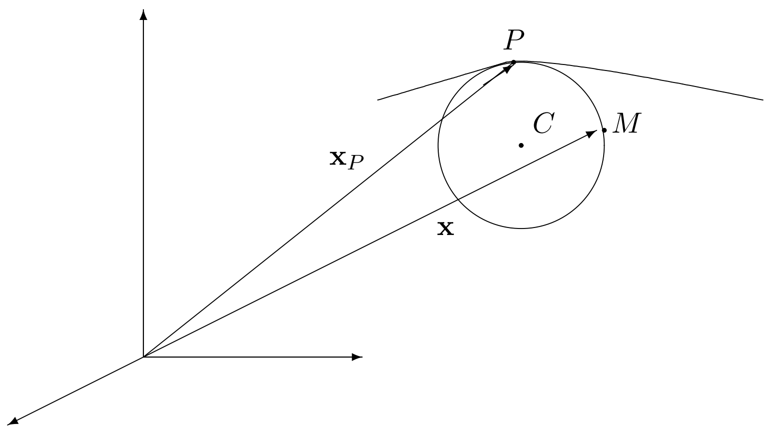
   dove l'indice P si riferisce al punto della curva.

Infatti, detto C il centro del cerchio, il luogo dei punti M equidistanti da C e giacenti nel piano osculatore è dato da

$$||M - C||^2 = R_P^2$$

e, d'altra parte,

$$M - C = (M - P) - (C - P) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_P - R_P \mathbf{n}_P$$



Infine, un commento sulla formula per il raggio di curvatura. Se $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, per ricavare il raggio di curvatura basta calcolare i moduli dei vettori

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{R}\mathbf{n}$$

e si ha subito che

$$\frac{1}{R} = \left|\left|\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}\right|\right|$$

Per comprendere il legame tra questa formula e quella proposta per parametrizzazioni generiche, si noti che

$$\left|\left|\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}\right|\right| = \left|\left|\frac{d}{ds}\left(\frac{d\mathbf{x}}{d\lambda}\frac{d\lambda}{ds}\right)\right|\right| = \left|\left|\frac{d^2\mathbf{x}}{d\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda}\frac{d^2\lambda}{ds^2}\right|\right|$$

e che, inoltre,

$$\left|\left|\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}\right|\right| = \left|\left|\frac{d\mathbf{x}}{ds} \wedge \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}\right|\right|$$

in quanto il primo fattore del prodotto esterno ha modulo unitario ed è perpendicolare al secondo vettore. Allora, da queste due espressioni, si ottiene

$$\left|\left|\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}\right|\right| = \left|\left|\frac{d\mathbf{x}}{ds} \wedge \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}\right|\right| = \left|\left|\frac{d\mathbf{x}}{d\lambda}\frac{d\lambda}{ds} \wedge \frac{d^2\mathbf{x}}{d\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2\right|\right|$$

4. *Si trovino le equazioni intrinseche di: (a) retta; (b) circonferenza; (c) elica cilindrica.*

   (a) Nel caso della retta, la terna intrinseca si mantiene parallela a sè stessa, dunque i suoi versori sono costanti al variare di s: le equazioni intrinseche sono, dalle equazioni di Serret,[1]

   $$\kappa(s) = 0; \qquad \tau(s) = 0.$$

   (b) sia r il raggio della circonferenza di equazione $\mathbf{x}(s) = r\cos\frac{s}{r}\mathbf{e}_1 + r\sin\frac{s}{r}\mathbf{e}_2$, da cui

   $$\mathbf{t} = -\sin\frac{s}{r}\mathbf{e}_1 + \cos\frac{s}{r}\mathbf{e}_2 \Longrightarrow \frac{d\mathbf{t}}{ds} = -\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}\mathbf{e}_2 = \frac{1}{r}\mathbf{n}.$$

   Dunque: $\kappa = 1/r$ e $\tau = 0$.

   (c) Nel caso dell'elica, partendo dall'equazione ricavata nell'Es. 2.7,

   $$\mathbf{x}(s) = r\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}\mathbf{e}_1 + r\sin\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}\mathbf{e}_2 + \frac{hs}{\sqrt{r^2+h^2}}\mathbf{e}_3,$$

   si ottengono $$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}\left(-r\sin\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}\mathbf{e}_1 + r\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}\mathbf{e}_2 + h\mathbf{e}_3\right)$$

   e $$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = -\frac{r}{r^2+h^2}\left(\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}\mathbf{e}_1 + \sin\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}\mathbf{e}_2\right),$$

   da cui si deduce che $\frac{1}{R} = \frac{r}{r^2+h^2}$. Inoltre, con qualche passaggio, usando la formula di Serret

   $$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\frac{1}{R}\mathbf{t} + \tau\mathbf{b},$$

   (dove, a parte l'incognita τ, ogni termine è facilmente calcolabile) si può ricavare $\tau = \frac{h}{r^2+h^2}$.

5. *Si dimostri che il raggio di curvatura di una parabola è minimo al vertice.*

   Scrivendo l'equazione vettoriale della parabola come

   $$\mathbf{x}(x) = x\mathbf{e}_1 + (ax^2 + bx + c)\mathbf{e}_2$$

   dove x è il parametro, e sfruttando le formule studiate, si ha

   $$\frac{1}{R} = \frac{|2a|}{(1 + (2ax+b)^2)^{3/2}}.$$

   Scelto $a > 0$ (R non dipende dal verso della concavità), calcoliamo

   $$\frac{dR}{dx} = 3\sqrt{1 + (2ax+b)^2}(2ax+b)$$

[1] ma anche notando che il raggio di curvatura di una retta è infinito e che la torsione è nulla essendo la retta una curva piana.

da cui si vede che la derivata si annulla nell'ascissa del vertice

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Siccome poi

$$\frac{d^2R}{dx^2} = \frac{6a(1+(2ax+b)^2)}{\sqrt{1+(2ax+b)^2}},$$

$$\frac{d^2R}{dx^2}\left(-\frac{b}{2a}\right) = 6a > 0,$$

R ha nel vertice il minimo valore.

6. *Una parabola è descritta da (vedi es.4.5)*

$$\mathbf{x}(\lambda) = \lambda\mathbf{u} + \lambda^2\mathbf{w}$$

dove $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{w}$ *sono versori che formano tra di loro un angolo* $\theta \in (0.\pi)$. *Si determini il vettore posizione del vertice.*

Poiché il raggio di curvatura è dato da

$$\frac{1}{R} = \frac{||(\mathbf{u} + 2\lambda\mathbf{w}) \wedge 2\mathbf{w}||}{(1+4\lambda^2)^{3/2}} = \frac{2\sin\theta}{(1+4\lambda^2)^{3/2}}$$

sfruttiamo il risultato dell'esercizio precedente e cerchiamo il valore del parametro per cui R è minimo:

$$\frac{dR}{d\lambda} = \frac{6\sqrt{1+4\lambda^2}}{\sin\theta}\lambda = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0.$$

Dunque, il vertice è nell'origine ($\mathbf{x}(0)$).