Esercizi vari - (Meccanica Analitica - a.a. 2009/10)

Un'elica cilindrica, di passo costante e altezza H, descritta dalle equazioni parametriche

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ \dfrac{H}{2n\pi}\theta \end{pmatrix}, \qquad \text{con} \quad \theta \in [0, 2n\pi],\ n \in \mathbb{N}$$

ha densità variabile

$$\delta = \frac{dm}{ds} = \gamma z,\ \gamma \in \mathbb{R}^+.$$

Si calcoli la massa dell'elica e si individui il suo centro di massa per ogni valore di n.

Siccome la lunghezza di un arco si valuta con

$$s(\theta) = \int_0^\theta \left|\frac{d\mathbf{x}}{d\theta}\right| d\theta = \sqrt{1 + \left(\frac{H}{2n\pi}\right)^2}\,\theta,$$

la massa totale dell'elica è

$$M = \int dm = \gamma \int_0^{2n\pi} \frac{H}{2n\pi}\theta \sqrt{1 + \left(\frac{H}{2n\pi}\right)^2} d\theta = \gamma \frac{H}{2}\sqrt{(2n\pi)^2 + H^2}.$$

(Si noti che se la densità fosse $\delta = \gamma =$costante, sarebbe $M = \gamma \int_0^s ds = \gamma\sqrt{(2n\pi)^2 + H^2}$.)

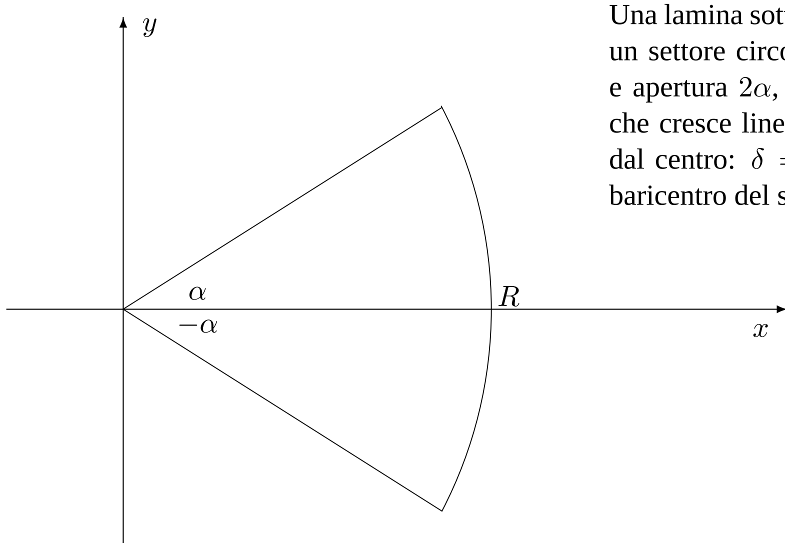
Per quel che riguarda il centro di massa, avendo già calcolato M, avremo che

$$M\mathbf{x}_G = \gamma \int_0^{2n\pi} \frac{H}{2n\pi}\theta \sqrt{1 + \left(\frac{H}{2n\pi}\right)^2}\,\mathbf{x} d\theta$$

e, conseguentemente,

$$\begin{aligned}
Mx_G &= \gamma \frac{H}{2n\pi}\sqrt{1 + \left(\frac{H}{2n\pi}\right)^2} \int_0^{2n\pi} \theta\cos\theta d\theta = \gamma \frac{H}{2n\pi}\sqrt{1 + \left(\frac{H}{2n\pi}\right)^2} \left([\theta\sin\theta]_0^{2n\pi} - \int_0^{2n\pi} \sin\theta d\theta \right) \\
My_G &= \gamma \frac{H}{2n\pi}\sqrt{1 + \left(\frac{H}{2n\pi}\right)^2} \int_0^{2n\pi} \theta\sin\theta d\theta = \gamma \frac{H}{2n\pi}\sqrt{1 + \left(\frac{H}{2n\pi}\right)^2} \left([-\theta\cos\theta]_0^{2n\pi} + \int_0^{2n\pi} \cos\theta d\theta \right) \\
Mz_G &= \gamma \left(\frac{H}{2n\pi}\right)^2 \sqrt{1 + \left(\frac{H}{2n\pi}\right)^2} \int_0^{2n\pi} \theta^2 d\theta = \gamma \left(\frac{H}{2n\pi}\right)^2 \sqrt{1 + \left(\frac{H}{2n\pi}\right)^2} \frac{(2n\pi)^3}{3}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{x}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{n\pi} \\ \\ \dfrac{2}{3}H \end{pmatrix}$$



Una lamina sottile ha la forma di un settore circolare di raggio R e apertura 2α, e ha una densità che cresce linearmente a partire dal centro: $\delta = k\rho$. Si trovi il baricentro del sistema.

Dalla definizione,

$$x_G = \frac{\iint\limits_S \delta x dx dy}{\iint\limits_S \delta dx dy}; \qquad y_G = \frac{\iint\limits_S \delta y dx dy}{\iint\limits_S \delta dx dy}$$

dove S rappresenta il dominio dell'integrazione. La geometria del problema suggerisce l'uso delle coordinate polari: tenendo conto del cambio di variabili, otteniamo

$$x_G = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_0^R k\rho\rho\cos\theta\rho d\rho d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_0^R k\rho\rho d\rho d\theta} = \frac{3}{4\alpha}R\sin\alpha; \qquad y_G = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_0^R k\rho\rho\sin\theta\rho d\rho d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_0^R k\rho\rho d\rho d\theta} = 0$$

dove quest'ultimo risultato era prevedibile per questioni di simmetria.

* *

Una lamina piana e omogenea è individuata nel piano Oxy dalla regione compresa tra la parabola

$$y = -x^2 + 1 \qquad \text{e la retta} \qquad y = 0$$

Scriviamo il tensore d'inerzia rispetto a questa scelta di assi.

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} \iint\limits_S \delta y^2 dx dy & -\iint\limits_S \delta xy dx dy & 0 \\ -\iint\limits_S \delta xy dx dy & \iint\limits_S \delta x^2 dx dy & 0 \\ 0 & 0 & \iint\limits_S \delta(x^2+y^2) dx dy \end{pmatrix}$$

Si noti che $I_{33} = I_{11} + I_{22}$ come deve essere per qualsiasi corpo rigido piano.

Il sistema è omogeneo, dunque la densità è costante, e vale

$$\delta = \frac{m}{\iint\limits_S dxdy} = \frac{m}{\int_{-1}^{1}\int_{0}^{-x^2+1} dxdy} = \frac{3}{4}m$$

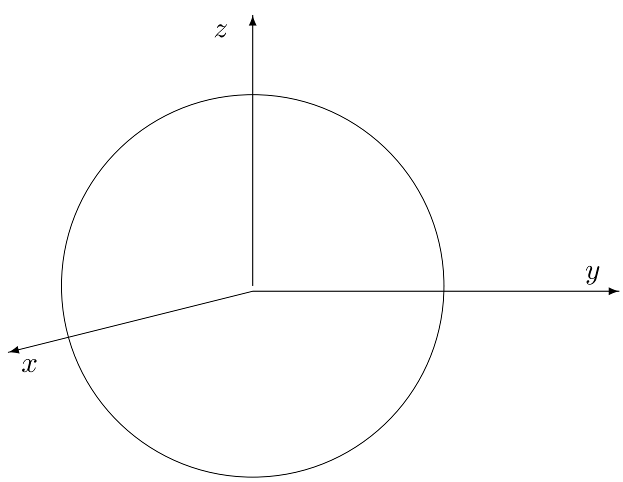
Poiché

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_{0}^{-x^2+1} y^2 dxdy &= \frac{1}{3}\left[-\frac{x^7}{7} + x + \frac{3}{5}x^5 - x^3\right]_{-1}^{1} \\
\int_{-1}^{1}\int_{0}^{-x^2+1} x^2 dxdy &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} \\
\int_{-1}^{1}\int_{0}^{-x^2+1} xy dxdy &= \frac{1}{4}\left[-\frac{x^6}{3} - x^4 - x^2\right]_{-1}^{1},
\end{aligned}$$

abbiamo infine che il tensore d'inerzia è

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} \frac{8}{35}m & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5}m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{7}m \end{pmatrix}$$

* *



Valutiamo il tensore d'inerzia di una sfera omogenea di massa m e raggio R rispetto a un sistema di assi baricentrali, verificando che tali assi sono principali d'inerzia, qualsiasi sia la loro orientazione.

Qui gli integrali tripli si calcolano trasformano le coordinate cartesiane in sferiche

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta; \qquad y = \rho \sin\phi \sin\theta, \qquad z = \rho\cos\phi$$

perché il problema comporta limiti di integrazione costanti. Bisogna peró ricordare di moltiplicare la funzione integranda per il determinante Jacobiano:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \end{pmatrix} = \rho^2 \sin\phi$$

Gli integrali sono della forma

$$I_{xx} = \sigma \iiint\limits_S (y^2+z^2)dxdydz = \frac{3m}{4\pi R^3}\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{R}(\rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta+\rho^2\cos^2\phi)\rho^2\sin\phi d\rho d\theta d\phi = \frac{2}{5}mR^2$$

$$I_{xy} = -\sigma \iiint\limits_S xy\,dxdydz = -\frac{3m}{4\pi R^3}\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{R}(\rho^2\sin^2\phi\sin\theta\cos\theta)\rho^2\sin\phi d\rho d\theta d\phi = 0$$

per cui, indipendentemente dalla scelta di assi,

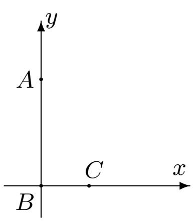
$$\mathbb{I}_G = \frac{2}{5}mR^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* *

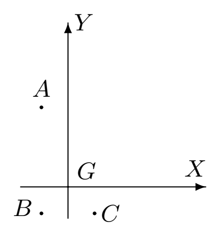
Un corpo rigido è costituito da tre punti materiali, A e B di massa m e C di massa $2m$, collocati nel piano Oxy, rispettivamente in $(0,4)$, $(0,0)$, $(2,0)$.
Si chiede di trovare gli assi principali d'inerzia del corpo, rispetto al suo centro di massa.

Dalla definizione, il centro di massa è posizionato in

$$\mathbf{x}_G = \frac{m4\mathbf{j} + 2m2\mathbf{i}}{4m} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$



Una volta trovato il centro di massa, scegliamo un sistema di riferimento con origine in esso e traslato rispetto a quello originale.



Nel sistema di riferimento traslato, i punti materiali hanno nuove coordinate:

$$A = (-1,3), \quad B = (-1,-1), \quad C = (1,-1)$$

e il tensore d'inerzia rispetto a questo sistema di riferimento è

$$\mathbb{I} = 4m\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

che manifestamente non è diagonale. Per diagonalizzare il tensore non seguiamo la procedura standard della teoria degli autovalori, ma cerchiamo direttamente un sistema di riferimento complanare, ruotato attorno a G di un angolo generico. L'incognita del problema è l'angolo che rende diagonale il tensore. In generale, una rotazione di assi comporta una trasformazione di similitudine

$$\mathbb{I}' = A\mathbb{I}A^T = 4m\begin{pmatrix} cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Svolti i prodotti matriciali, si trova che il tensore d'inerzia nel sistema ruotato ha la forma

$$\mathbb{I}' = 4m \begin{pmatrix} 3cos^2\theta + \sin^2\theta + \sin 2\theta & \cos 2\theta - \sin 2\theta & 0 \\ \cos 2\theta - \sin 2\theta & 3\sin^2\theta - \sin 2\theta + \cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

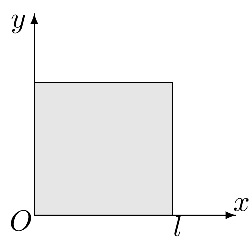
$\mathbb{I}'$ è diagonale se e solo se

$$\sin 2\theta = \cos 2\theta \Longrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{4} + n\pi \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{8} + n\frac{\pi}{2}$$

Per una rotazione di $\frac{\pi}{8}$ abbiamo dunque che

$$\mathbb{I}' = 4m \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

* *



Vogliamo determinare gli assi principali d'inerzia e i momenti principali d'inerzia di una lamina quadrata omogenea, di lato l e massa m, rispetto a un suo vertice. Disponiamo la lamina come in figura, in modo che il vertice coincida con l'origine del sistema di riferimento.

Rispetto al sistema in figura,

$$I_{xx} = \sigma \int_0^l \int_0^l y^2 dx dy = \frac{m}{3} l^2$$

$$I_{xy} = -\sigma \int_0^l \int_0^l y^2 dx dy = -\frac{m}{4} l^2$$

cosicché

$$\mathbb{I}_O = ml^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Per diagonalizzare questa matrice, dobbiamo cercare gli autovalori λ e le autodirezioni $\mathbf{x}$ di $\mathbb{I}_O$, che equivale a risolvere l'equazione

$$\mathbb{I}_O \mathbf{x}_k = \lambda_k \mathbf{x}_k, \qquad k = 1, 2, 3$$

che si traduce nel sistema omogeneo di primo grado

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3} - \lambda_k\right) x_k - \frac{1}{4} y_k = 0 \\ \\ -\frac{1}{4} x_k + \left(\frac{1}{3} - \lambda_k\right) y_k = 0 \\ \\ \left(\frac{2}{3} - \lambda_k\right) z_k = 0 \end{cases}$$

La condizione che esista una soluzione non nulla di tale sistema è l'equazione caratteristica

$$\det\begin{pmatrix} \frac{1}{3}-\lambda & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

che fornisce i tre autovalori (che in realtà andrebbero moltiplicati per ml^2)

$$\lambda_1 = \frac{7}{12}; \qquad \lambda_2 = \frac{1}{12}; \qquad \lambda_3 = \frac{2}{3}$$

La sostituzione degli autovalori nel sistema omogeneo fornisce gli autovettori:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \frac{7}{12} &\implies x_1 = y_1; \quad z_1 = 0 \\ \lambda_2 = \frac{1}{12} &\implies x_2 = -y_2; \quad z_2 = 0 \\ \lambda_3 = \frac{2}{3} &\implies x_3 = 0,\, y_3 = 0; z_3 = \text{arbitrario} \end{aligned}$$

Le tre autodirezioni possono essere espresse mediante i versori

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} \\ \mathbf{e}_2 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{k} \end{aligned}$$

La teoria (vds. Goldstein) garantisce che con i tre autovettori si costruisce una matrice che diagonalizza il tensore d'inerzia. Verifichiamolo. Scrivendo tale matrice e la sua inversa rispettivamente come

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la relazione

$$\mathbb{I}'_O = A^{-1}\mathbb{I}_O A \implies$$

$$\mathbb{I}'_O = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{ml^2}{3} & -\frac{ml^2}{4} & 0 \\ -\frac{ml^2}{4} & \frac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}ml^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}ml^2 \end{pmatrix}$$

il cui significato geometrico è manifesto: la matrice $B = A^{-1}$ non rappresenta altro che una rotazione piana (attorno all'asse Oz) di un angolo pari a $\frac{\pi}{4}$. Dunque, gli assi principali d'inerzia rispetto a O sono: l'asse Oz e due nuovi assi, il primo diretto come la diagonale del quadrato, l'altro perpendicolare a esso.

* *

Alcune prorpietà (di non difficile dimostrazione) permettono di scegliere *a vista* uno o piú assi principali d'inerzia, evitando cosí il procedimento di diagonalizzazione.

- Ogni asse principale d'inerzia, rispetto al baricentro, è asse principale d'inerzia anche rispetto a ogni altro suo punto.

- Se una retta è asse principale d'inerzia rispetto a un suo punto e passa per il baricentro, è pure asse principale d'inerzia rispetto al baricentro (e dunque rispetto a ogni altro suo punto).
- Se un sistema ammette un piano di simmetria, ogni perpendicolare a questo piano è asse principale d'inerzia.

✻ ✻

Consideriamo due sistemi di riferimento solidali al corpo rigido, rispettivamente, in un punto O e nel baricentro G e ricaviamo la proprietà di trasformazione del tensore d'inerzia nel passaggio da un sistema all'altro. Applichiamo la trasformazione

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_G + \mathbf{x}'_i$$

dove $\mathbf{x}'_i$ rappresenta il vettore spostamento rispetto al sistema che ha origine in G:

$$\mathbb{I}_O = \sum_i m_i(\mathbf{x}_i^2\mathbf{1} - \mathbf{x}_i\mathbf{x}_i) = \sum_i m_i[(\mathbf{x}_G^2 + \mathbf{x}'^2_i + 2\mathbf{x}_G \cdot \mathbf{x}'_i)\mathbf{1} - (\mathbf{x}_G + \mathbf{x}'_i)(\mathbf{x}_G + \mathbf{x}'_i)].$$

Tenuto conto che si annullano tutti i termini che hanno come fattore

$$\sum_i m_i \mathbf{x}'_i$$

che è un vettore nullo nel sistema con origine il baricentro, si ha

$$\mathbb{I}_O = \sum_i m_i[(\mathbf{x}_G^2 + \mathbf{x}'^2_i)\mathbf{1} - (\mathbf{x}_G\mathbf{x}_G + \mathbf{x}'_i\mathbf{x}'_i)],$$

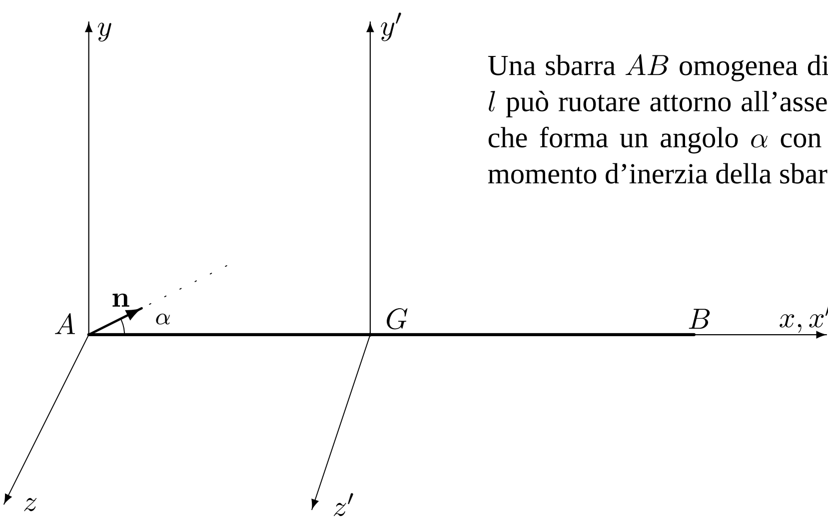
cosicché il tensore si trasforma secondo la formula

$$\mathbb{I}_O = \mathbb{I}_G + M(\mathbf{x}_G^2\mathbf{1} - \mathbf{x}_G\mathbf{x}_G) =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_i m_i(y'^2_i + z'^2_i) & -\sum_i m_i x'_i y'_i & -\sum_i m_i x'_i z'_i \\ -\sum_i m_i x'_i y'_i & \sum_i m_i(x'^2_i + z'^2_i) & -\sum_i m_i y'_i z'_i \\ -\sum_i m_i x'_i z'_i & -\sum_i m_i y'_i z'_i & \sum_i m_i(x'^2_i + y'^2_i) \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} y_G^2 + z_G^2 & -x_G y_G & -x_G z_G \\ -x_G y_G & x_G^2 + z_G^2 & -y_G z_G \\ -x_G z_G & -y_G z_G & x_G^2 + y_G^2 \end{pmatrix}$$

✻ ✻

Una sbarra AB omogenea di massa m e lunghezza l può ruotare attorno all'asse di rotazione in figura, che forma un angolo α con la sbarra. Si valuti il momento d'inerzia della sbarra rispetto a tale asse



Il tensore d'inerzia rispetto al sistema di riferimento $Gx'y'z'$ è

$$\mathbb{I}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{12} \end{pmatrix}, \quad \text{essendo} \quad I_{y'y'} = I_{z'z'} = \frac{m}{l}\int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx$$

Dalle relazioni precedentemente trovate, il tensore d'inerzia rispetto al sistema di riferimento $Axyz$ è

$$\mathbb{I}_A = \mathbb{I}_G + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{3} \end{pmatrix}$$

Dunque, il momento d'inerzia cercato è

$$I_n = \mathbf{n}\cdot\mathbb{I}_A\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = m\frac{l^2}{3}\sin\alpha$$

A titolo di esercizio si noti che i tensori $\mathbb{I}_G$ e $\mathbb{I}_A$ si trasformano per una rotazione piana di un angolo α attorno all'asse Gz' (e Az) secondo la

$$\mathbb{I}'_G = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{ml^2}{12} \begin{pmatrix} \sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{I}'_A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{ml^2}{3} \begin{pmatrix} \sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Relazioni, queste, che evidentemente soddisfano

$$\mathbb{I}'_A = \mathbb{I}'_G + \frac{ml^2}{4} \begin{pmatrix} \sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix}$$

in quanto, rispetto al sistema $AXYZ$ ottenuto dalla rotazione di cui sopra, le coordinate di G sono

$$X_G = \frac{l}{2}\cos\alpha, \qquad Y_G = \frac{l}{2}\sin\alpha, \qquad Z_G = 0.$$

Tutto è coerente e, in piú, il momento d'inerzia cercato non è altro che I_{XX} in quanto l'asse AX coincide con l'asse di rotazione. Si noti che il momento d'inerzia rispetto a $\mathbf{n}$ non dipende da alcun orientamento né dall'origine del sistema di riferimento.

* *

Una lamina omogenea di massa m ha la forma di un triangolo rettangolo isoscele, di cateto l. Sapendo che la lamina ruota con velocità angolare costante attorno a uno dei propri cateti,

1. si determini l'energia cinetica del sistema;

2. si valuti il momento angolare del sistema rispetto al suo centro di massa.

Si noti che le domande non implicano alcuna scelta di assi; discuteremo sulle possibili scelte e cominciamo scegliendo come sistema di assi solidali l'asse Oy diretto come l'asse di rotazione e su cui giace il cateto OA, e l'asse Ox su cui giace il cateto OB. Ovviamente, l'asse Oz rimane perpendicolare alla lamina.

Per il calcolo degli elementi del tensore d'inerzia e del baricentro, si devono valutare integrali doppi della forma

$$\int_0^l \int_0^{l-x} dydx$$

in quanto il dominio d'integrazione è limitato dall'ipotenusa che, nel piano Oxy, appartiene alla retta $y = -x + l$. Essendo la densità (costante) uguale a $\frac{2m}{l^2}$, con semplici calcoli si ottiene

$$\mathbb{I}_O = \begin{pmatrix} \frac{ml^2}{6} & -\frac{ml^2}{12} & 0 \\ -\frac{ml^2}{12} & \frac{ml^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{3} \end{pmatrix}$$

Per rispondere alla prima domanda non c'è nessuna necessità di diagonalizzare il tensore. Il calcolo, infatti, è semplice:

$$T = \frac{\omega^2}{2}\mathbf{n}^T\mathbb{I}\mathbf{n} = \frac{\omega^2}{2}\frac{ml^2}{12}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{ml^2}{12}\omega^2.$$

<u>Osservazione</u>: la velocità angolare e il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione sono costanti, pertanto risulta semplice il calcolo dell'energia cinetica nella forma

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 I = \frac{\omega^2}{2}\frac{2m}{l^2}\int_0^l \int_0^{l-y} x^2 dxdy = \frac{\omega^2}{2}\frac{ml^2}{6}.$$

Volendo comunque diagonalizzare il tensore d'inerzia, dobbiamo risolvere il seguente problema agli autovalori

$$\begin{cases} (2-\lambda_k)x_k - y_k = 0 \\ -x_k + (2-\lambda_k)y_k = 0 \\ (4-\lambda)z_k = 0 \end{cases} \Longrightarrow \det\begin{pmatrix} (2-\lambda_k) & -1 & 0 \\ -1 & (2-\lambda_k) & 0 \\ 0 & 0 & (4-\lambda_k) \end{pmatrix} = 0$$

Gli autovalori e la matrice degli autovettori sono, rispettivamente,

$$I_1 = \frac{ml^2}{12}; \quad I_2 = \frac{ml^2}{4}; \quad I_3 = \frac{ml^2}{3}; \qquad A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rispetto al nuovo sistema di assi principali (ottenuto con una rotazione di $\pi/4$ attorno all'asse Oz), la velocità angolare ha due componenti, $\omega_1 = \omega_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega$. E dunque,

$$T = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) = \frac{ml^2}{12}\omega^2.$$

Passando alla seconda questione, dobbiamo valutare

$$\mathbb{I}_G = \mathbb{I}_O - m \begin{pmatrix} y_G^2 & -x_G y_G & 0 \\ -x_G y_G & x_G^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_G^2 + y_G^2 \end{pmatrix}$$

oppure, indicando con $Ox'y'$ il sistema di assi principali

$$\mathbb{I}'_G = \mathbb{I}'_O - m \begin{pmatrix} y_G'^2 & -x'_G y'_G & 0 \\ -x'_G y'_G & x_G'^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_G'^2 + y_G'^2 \end{pmatrix}$$

D'altra parte,

$$x_G = y_G = \frac{2}{l^2} \int_0^l \int_0^{l-x} x dy dx = \frac{l}{3} \Longrightarrow x'_G = \frac{l\sqrt{2}}{3}, \quad y'_G = 0$$

Abbiamo dunque (si noti che la traslazione mantiene la struttura diagonale di $\mathbb{I}$)

$$\mathbb{I}_G = \begin{pmatrix} \frac{ml^2}{18} & \frac{ml^2}{36} & 0 \\ \frac{ml^2}{36} & \frac{ml^2}{18} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{9} \end{pmatrix} \qquad \mathbb{I}'_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{36}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9}ml^2 \end{pmatrix}$$

Infine,

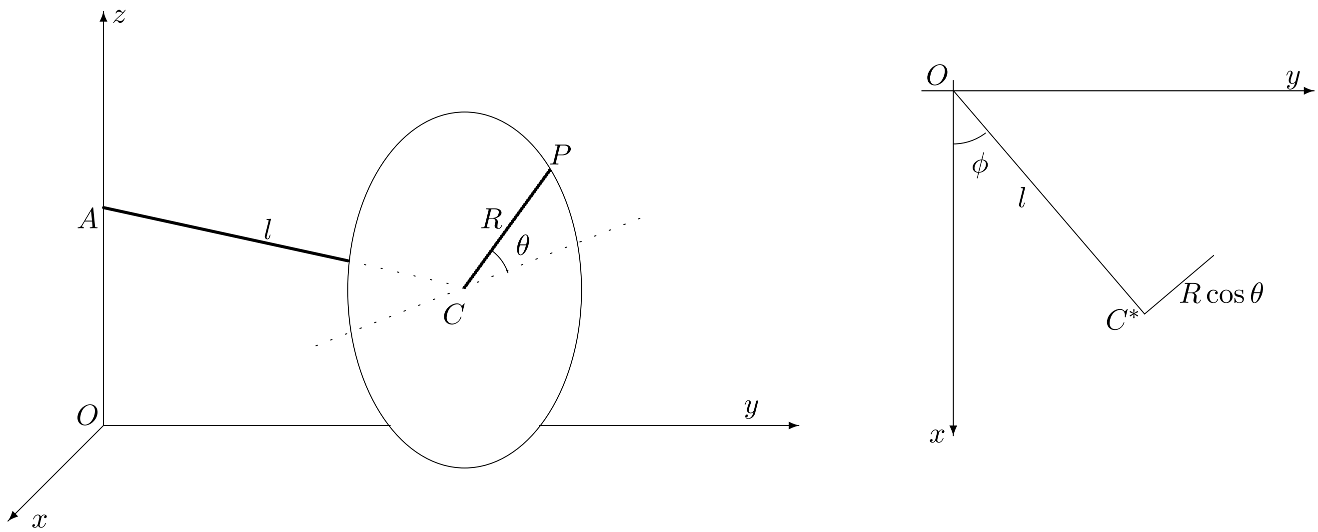
$$\mathbf{L}_G = \mathbb{I}_G \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \frac{ml^2}{18} & \frac{ml^2}{36} & 0 \\ \frac{ml^2}{36} & \frac{ml^2}{18} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{36}\omega ml^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}_G = \mathbb{I}'_G \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{12} ml^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\omega \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\omega \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{24}\omega ml^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Naturalmente, le due decomposizioni del momento angolare sono connesse da una rotazione di $\frac{\pi}{4}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{36}\omega ml^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{24} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

* *



Un disco omogeneo, di raggio R e massa M, è libero di ruotare attorno all'asse orizzontale AC; inoltre, sul bordo del disco è fissata una particella di massa m. Sapendo che il corpo rigido può ruotare attorno all'asse verticale Oz come in figura, si scriva la funzione di Lagrange del sistema.

Dal testo (e dalla figura) si deduce che il disco rimane sempre verticale e che i gradi di libertà corrispondono alle due rotazioni piane che esso può compiere, indipendentemente l'una dall'altra, attorno AC e attorno Oz. Indicate con θ e ϕ le coordinate lagrangiane che descrivono tali rotazioni, valutiamo l'energia cinetica. Poiché l'energia cinetica è uno scalare, conviene calcolare separatamente l'energia cinetica del disco, che è omogeneo, e quella del punto:

$$T = T_D + T_P$$

Applicando il teorema di König,

$$T_D = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{x}}_G^2 + \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$$

Siccome

$$\mathbf{x}_G = \begin{pmatrix} l\cos\phi \\ l\sin\phi \\ R \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\phi}\sin\theta \\ \dot{\phi}\cos\theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} \frac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{pmatrix},$$

abbiamo infine che

$$T_D = \frac{1}{2}Ml^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{4}\dot{\phi}^2 + \frac{MR^2}{2}\dot{\theta}^2\right)$$

Per calcolare il contributo della particella alla lagrangiana, si consideri la figura di destra, dove C^* è la proiezione di C sul piano Oxy, da cui si deduce che

$$\mathbf{x}_P = \begin{pmatrix} l\cos\phi + R\cos\theta\sin\phi \\ l\sin\phi - R\cos\theta\cos\phi \\ R + R\sin\theta \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\mathbf{x}}_P = \begin{pmatrix} -l\dot{\phi}\sin\phi - R\dot{\theta}\sin\theta\sin\phi + R\dot{\phi}\cos\theta\cos\phi \\ l\dot{\phi}\cos\phi + R\dot{\theta}\sin\theta\cos\phi + R\dot{\phi}\cos\theta\sin\phi \\ R\dot{\theta}\cos\theta \end{pmatrix}$$

Infine, abbiamo

$$T_P = \frac{m}{2}(l^2\dot{\phi}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\phi}^2\cos^2\theta + 2lR\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\theta); \qquad V_P = mgz_P = mgR(1+\sin\theta)$$

$$\mathscr{L} = T_D + T_P - V_P$$

Commento. Se il disco non ruotasse attorno al proprio asse ma solo rispetto all'asse Oz, i suoi punti manterrebbero una distanza costante da tale asse. Potremmo in tal caso valutare facilmente il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione come

$$I = \sum m_i d_i^2 = 4\sigma \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_0^R (l^2 + x^2) dx\, dy$$

dove il calcolo è svolto su un quarto del disco e moltiplicato per 4 e le coordinate sono di un sistema solidale al disco con origine nel suo centro. Si ha poi che

$$I = \frac{4M}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{\pi/2} \rho(l^2 + \rho^2 \cos^2\theta) d\rho\, d\theta = M\left(l^2 + \frac{R^2}{4}\right).$$

Si confronti l'energia cinetica corrispondente

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 = \frac{M}{2}\dot{\phi}^2 \left(l^2 + \frac{R^2}{4}\right)$$

con quella trovata precedentemente. Si noti ancora che il disco, pur mantenendo costante la distanza dall'asse di rotazione, ruota rispetto a un osservatore che trasla rispetto a quello inerziale, dunque il contributo T' al teorema di König è dovuto a questa rotazione. Se il corpo rigido fosse (ma solo in questo unico caso!) un'asta parallela all'asse Oz e in rotazione rispetto a esso, il corpo rigido si muoverebbe di pura traslazione rispetto a tale sistema *intermedio*, poiché tutti i suoi punti avrebbero la medesima velocità. In tal caso

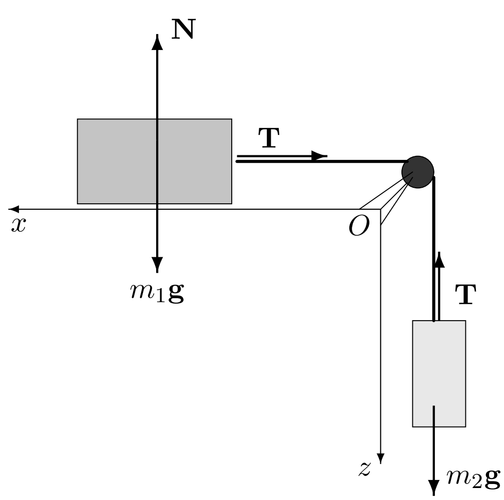
$$T = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{x}}_G^2.$$

* *

Il principio dei lavori virtuali asserisce che la somma dei lavori fatti dalle reazioni vincolari sui punti materiali del sistema è nulla:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{\Phi}_i \cdot \delta\mathbf{x}_i = 0,$$

ma ciò non implica che ciascuna reazione vincolare faccia lavoro nullo.



Due blocchi sono vincolati a muoversi, il primo senza strisciare, lungo la retta orizzontale Ox, il secondo lungo la verticale Oz. La fune che collega i due blocchi si mantiene tesa e di lunghezza L e dunque le tensioni esercitate dalla fune sui blocchi sono uguali in modulo. Se x e z sono le coordinate dei punti di applicazione della fune,

$$x + z = L.$$

Il sistema è a un grado di libertà e, scelto uno spostamento virtuale δx del blocco m_1 (parallelo al vettore tensione!), lo spostamento virtuale (non indipendente) del secondo blocco è dato da

$$\delta z = \delta(L - x)$$

Dunque, il lavoro virtuale totale è dato da

$$\delta W = ||\mathbf{N}||\delta x \cos\frac{\pi}{2} + T\delta x - T\delta x = 0$$

Come ulteriore commento, osserviamo che il principio di D'Alembert, $\sum_i(\mathbf{F}_i^{(a)} - m_i\ddot{\mathbf{x}}_i)\cdot\delta\mathbf{x}_i = 0$, si traduce per il presente moto in

$$(m_1 g\mathbf{k} - m_1\ddot{x}\mathbf{i})\cdot\delta x\mathbf{i} + (m_2 g\mathbf{k} - m_2\ddot{z}\mathbf{k})\cdot(-\delta x)\mathbf{k},$$

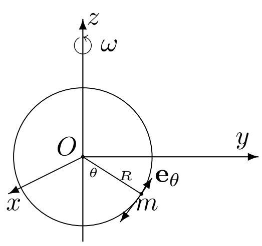
dove, ancora, si è considerato che $\delta z = -\delta x$. Siccome si ottiene che per ogni arbitrario δx

$$(-m_1\ddot{x} - m_2 g + m_2\ddot{z})\delta x = 0$$

di qui si deduce, tenendo conto che $\ddot{z} = -\ddot{x}$, l'equazione di Newton

$$\ddot{z} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}g.$$

* *



Una particella di massa m si muove senza attrito su una guida circolare di raggio R. La guida ruota con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ attorno all'asse verticale, immersa in un fluido viscoso che esercita sulla massa una forza dissipativa. Supporremo tangenziale tale effetto smorzante, per cui la forza sarà diretta come il versore tangente alla circonferenza, ma con verso opposto e modulo dipendente dalla velocità di rotazione lungo la guida.

Vogliamo scrivere per il sistema $n = 3N - r$ equazioni differenziali del secondo ordine in $n = 3N - r$ variabili lagrangiane.

(a) Determinazione dei gradi di libertà e scelta delle variabili lagrangiane.

Il sistema, costituito da un unico punto materiale, ha un solo grado di libertà. Infatti, usando le equazioni di trasformazione da coordinate cartesiane a coordinate sferiche, si ottiene:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\phi \\ y = \rho\sin\theta\sin\phi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x = R\sin\theta\cos\omega t \\ y = R\sin\theta\sin\omega t \\ z = -R\cos\theta \end{cases} \tag{1}$$

dove si sono usati due vincoli olonomi: $\rho - R = 0$, $\phi - \omega t = 0$.

(b) Espressione dell'energia cinetica totale mediante le variabili lagrangiane.

La definizione di energia cinetica,

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

richiede la seguente trasformazione delle velocità[1]:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = R\dot{\theta}\cos\theta\cos\omega t - R\omega\sin\theta\sin\omega t \\ \dot{y} = R\dot{\theta}\cos\theta\sin\omega t + R\omega\sin\theta\cos\omega t \\ \dot{z} = R\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

L'espressione per T sembra particolarmente complessa, ma elevando al quadrato le tre componenti della velocità e sommando i quadrati, si ha, per effetto dei segni opposti dei doppi prodotti e della proprietà $\sin^2 + \cos^2 = 1$,

$$T = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 = \frac{m}{2}R^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2\sin^2\theta)$$

(c) Espressione delle forze generalizzate mediante le variabili lagrangiane .

In presenza di una sola variabile lagrangiana, c'è una sola eventuale forza generalizzata. Dalla definizione data in teoria, abbiamo

$$Q_k := \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} \Longrightarrow Q = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}, \tag{2}$$

dove **F** è la risultante di tutte le forze attive applicate alla particella. Nel nostro caso sono presenti la forza peso e la forza dissipativa:

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{k} - b\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta,$$

b essendo un coefficiente costante. Derivando la (1) rispetto a θ, si ottiene

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\omega t \\ R\cos\theta\sin\omega t \\ R\sin\theta \end{pmatrix} = R\mathbf{e}_\theta$$

in quanto rappresenta vettore tangente all'orbita parametrizzata da θ, dunque all'anello[2]. D'altra parte, questa relazione si verifica direttamente, notando che $\mathbf{e}_\theta$ lungo gli assi orizzontale e verticale ha componenti $\sin\theta$ e $\cos\theta$,

$$\mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\omega t \\ \cos\theta\sin\omega t \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

Allora, la (2) diviene:

$$\begin{aligned} Q &= -mg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\omega t \\ R\cos\theta\sin\omega t \\ R\sin\theta \end{pmatrix} - b\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \cdot (R\mathbf{e}_\theta) \\ &= -mgR\sin\theta - b\dot{\theta}R \end{aligned}$$

[1]per ottenere la formula che segue, si deriva la (1) rispetto al tempo

[2]Si noti che la derivata parziale rispetto a θ tratta l'angolo $\phi = \omega t$ come costante: in tal senso l'anello può essere considerato orbita, mentre in realtà la curva percorsa dalla particella giace su una sfera e risente della seconda rotazione

(d) Le equazioni differenziali del moto nelle variabili lagrangiane .

Osserviamo che:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = mR^2\dot\theta; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\theta}\right) = mR^2\ddot\theta; \qquad \frac{\partial T}{\partial \theta} = mR^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta$$

Dunque, infine, dall'equazione generale

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \qquad k = 1, n$$

si ha:

$$mR^2\ddot\theta - mR^2\omega^2\sin\theta\cos\theta = -mgR\sin\theta - bR\dot\theta$$

ovvero l'equazione differenziale del secondo ordine in forma normale

$$\ddot\theta = -\frac{b}{mR}\dot\theta + \omega^2\sin\theta\cos\theta - \frac{g}{R}\sin\theta$$

* *