

INTEGRALI DI LINEA E FORZE CONSERVATIVE

Corso di Meccanica Analitica

a.a. 2009/2010 - II trimestre

Sommario

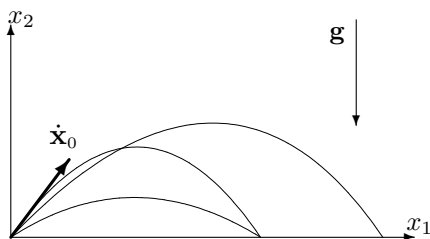
Questi appunti, informali e costruiti su esempi particolarmente esplicativi, mirano a discutere con linguaggio adatto alla Meccanica Analitica le caratteristiche delle forze conservative. I paragrafi che seguono, nell'ordine, mostrano che:

1. ci sono forze che compiono lavoro indipendente dal cammino percorso;
2. è viceversa facile individuare forze posizionali (che dipendono solo dalle variabili spaziali) con proprietà opposte: si mostra un esempio in cui il lavoro calcolato tra due estremi fissati, fornisce tre valori diversi, uno per ogni percorso;
3. per verificare che una forza è conservativa non occorre calcolare il lavoro su tutte le traiettorie congiungenti due stati (sono infinite!): c'è un'opportuna definizione equivalente;
4. se le forze sono conservative, ci sono due vantaggi: si può scegliere, per calcolare il lavoro, il percorso "più semplice" (come per es. un percorso rettilineo); si conserva l'energia meccanica, proprietà rilevante per trovare una soluzione al problema del moto;
5. ci sono alcune altre definizioni equivalenti di forza conservativa;
6. le condizioni elencate fino a qui possono avere un carattere locale, cioè non valere su tutto lo spazio: le forme differenziali possono essere chiuse ma non esatte;
7. le costanti del moto sono una generalizzazione delle leggi di conservazione e hanno un notevole significato geometrico.

1 Lavoro lungo il moto del proiettile

Consideriamo il moto di un proiettile descritto dalle equazioni di Newton

$$m\ddot{\mathbf{x}} = m\mathbf{g} = -mg\mathbf{e}_2 \implies m \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \quad (1.1)$$



Condizioni iniziali: per tutti i moti $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$.
La velocità iniziale, tangente alle orbite,
seleziona le orbite.

I moti partono dall'origine e la soluzione dipende dalla velocità iniziale:

$$x_1 = \dot{x}_{01}t \quad (1.2)$$

$$x_2 = \dot{x}_{02}t - g\frac{t^2}{2}. \quad (1.3)$$

Dalle equazioni del moto e dalle corrispondenti soluzioni si ricavano le seguenti informazioni:

ORBITA. L'orbita, ottenuta eliminando t , è la parabola di equazione

$$x_2 = -\frac{g}{2} \frac{x_1^2}{\dot{x}_{01}^2} + \frac{\dot{x}_{02}}{\dot{x}_{01}} x_1, \quad (1.4)$$

con vertice in $\left(\frac{\dot{x}_{01}\dot{x}_{02}}{g}; \frac{1}{2} \frac{\dot{x}_{02}^2}{g}\right)$.

GITTATA. Le intersezioni dell'orbita con l'asse x_1 individuano la gittata:

$$\frac{x_1}{\dot{x}_{01}} \left(\frac{g}{2\dot{x}_{01}} x_1 - \dot{x}_{02} \right) = 0 \implies x_1 = 0; \quad x_1 = \frac{2}{g} \dot{x}_{01} \dot{x}_{02}^1$$

TEMPO DI VOLO. Il tempo di volo corrispondente alla gittata è ricavato dalla (1.2):

$$\frac{2}{g} \dot{x}_{01} \dot{x}_{02} = \dot{x}_{01} t \implies t = \frac{2}{g} \dot{x}_{02}$$

La curva su cui calcoliamo il lavoro è già *naturalmente* parametrizzata dal tempo (nel senso che conosciamo la soluzione (1.2) e (1.3) del moto); il lavoro svolto dalla forza peso durante il moto è dunque:

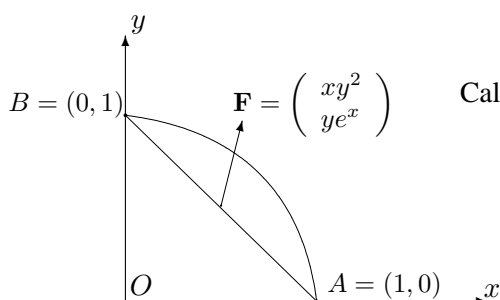
$$\begin{aligned} W_{01} &= \int_0^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) dt = \int_0^{t_1} (-mg\mathbf{e}_2) \cdot [\dot{x}_{01}\mathbf{e}_1 - (gt - \dot{x}_{02})\mathbf{e}_2] dt = \\ &= mg \int_0^{t_1} (gt - \dot{x}_{02}) dt = mg \left(\frac{1}{2} gt_1^2 - \dot{x}_{02} t_1 \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

In particolare, se l'estremo superiore di integrazione è quello relativo alla gittata,

$$W_{01} = mg \int_0^{2\dot{x}_{02}/g} (gt - \dot{x}_{02}) dt = 0. \quad (1.6)$$

Le (1.5) e (1.6) evidenziano che il risultato dell'integrazione dipende solo dalle configurazioni iniziale e finale del sistema, non dal cammino percorso.

2 Dipendenza del lavoro dal percorso



Calcoliamo il lavoro della forza \mathbf{F} su tre cammini diversi, da A verso B :

- (a) lungo la retta $y = -x + 1$
- (b) da A sull'asse x fino all'origine e da lí fino a B sull'asse y
- (c) sull'arco della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$

(a) i) parametrizzazione della curva:

$$x = -y + 1, \quad y \in [0, 1] \quad \text{è il parametro}$$

¹ $\dot{x}_{01}\dot{x}_{02} = k$ individuano una famiglia di moti con la stessa gittata

ii) derivata prima e forza:

$$\mathbf{x}(y) = \begin{pmatrix} -y + 1 \\ y \end{pmatrix} \implies \frac{d\mathbf{x}}{dy} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}(y)) = \begin{pmatrix} (-y + 1)y^2 \\ ye^{-y+1} \end{pmatrix}$$

iii) calcolo del lavoro:

$$\begin{aligned} W_{(a)} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{x}(y)) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dy} dy = \int_0^1 [(y-1)y^2 + ye^{-y+1}] dy = \left| \frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{3} - (1+y)e^{-y+1} \right|_0^1 = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - 2 + e = e - \frac{25}{12} \end{aligned}$$

(b) i) il cammino si compone di due tratti:

$$y = 0, \quad x \in [1, 0]; \quad x = 0, \quad y \in [0, 1]$$

ii) cui corrispondono, rispettivamente,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(x) &= \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} & \frac{d\mathbf{x}}{dx} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \mathbf{F}(\mathbf{x}(x)) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}(y) &= \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} & \frac{d\mathbf{x}}{dy} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \mathbf{F}(\mathbf{x}(y)) &= \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

iii) calcolo del lavoro:

$$W_{(b)} = \int_1^0 \mathbf{F}(\mathbf{x}(x)) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dx} dx + \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{x}(y)) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dy} dy = 0 + \int_0^1 y dy = \frac{1}{2}$$

(c) i) Scegliamo come parametro l'angolo spazzato dal vettore \mathbf{x} per andare da A a B lungo la circonferenza: $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$;

ii) derivata prima e forza:

$$\mathbf{x}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \implies \frac{d\mathbf{x}}{d\theta} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}(\theta)) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin^2 \theta \\ \sin \theta e^{\cos \theta} \end{pmatrix}$$

iii) calcolo del lavoro:

$$\begin{aligned} W_{(a)} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{F}(\mathbf{x}(\theta)) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos \theta \sin^3 \theta + \sin \theta \cos \theta e^{\cos \theta}) d\theta = \\ &= \left| -\frac{\sin^4 \theta}{4} - e^{\cos \theta} (\cos \theta - 1) \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

3 Forze conservative e potenziali

Se, come succede nel primo esempio ma non nel secondo, esiste una funzione scalare $U(\mathbf{x})$ tale che

$$\mathbf{F} = \nabla U := \frac{\partial U}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial U}{\partial x_3} \mathbf{e}_3, \quad (3.1)$$

(dove stiamo appunto definendo il **gradiente** (∇) di una funzione scalare) allora il calcolo diretto del lavoro mostra subito l'indipendenza dal cammino percorso. Infatti, ricordando la definizione di **differenziale** di una funzione di piú variabili,

$$dU(\mathbf{x}) = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U}{\partial x_3} dx_3 \quad (3.2)$$

e l'espressione in coordinate cartesiane per il prodotto scalare:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1 \quad a_2 \quad a_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

si ha che:

$$\nabla U \cdot d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_1} & \frac{\partial U}{\partial x_2} & \frac{\partial U}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U}{\partial x_3} dx_3$$

vale a dire che se la forza è conservativa,

$$\boxed{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \nabla U \cdot d\mathbf{x} = dU} \quad (3.3)$$

Allora, il calcolo del lavoro porta a:

$$W_{1,2} = \int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_1^2 dU(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}_2) - U(\mathbf{x}_1) \quad (3.4)$$

che dipende solo dal valore di U agli estremi del cammino.

Esercizio: si provi l'esistenza del potenziale nel moto del proiettile. Si consideri poi la forza del secondo esempio e si provi che non esiste alcuna funzione $U(x, y)$ che soddisfa

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} xy^2 \\ ye^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \end{pmatrix}$$

4 Quali vantaggi dall'esistenza di un potenziale?

Sicuramente la grande semplificazione del calcolo del lavoro. Ma, di piú, c'è un'altra conseguenza, inerente le equazioni di Newton: siccome, in generale,

$$W_{1,2} = \int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}} dt = \int_1^2 m\ddot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dt = \int_2^1 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 \right) dt = T(2) - T(1) \quad (4.1)$$

dove $T(1) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2(t_1)$ è l'energia cinetica del punto di massa m all'istante iniziale t_1 , se la forza è conservativa, uguagliamo i lavori calcolati in (3.4) e (4.1):

$$U(t_2) - U(t_1) = T(t_1) - T(t_2) \implies T(t_1) - U(t_1) = T(t_2) - U(t_2)$$

(si noti che U è stazionario, non dipende cioè esplicitamente dal tempo, dunque il suo valore in un estremo è sempre lo stesso: per questo possiamo scrivere $U(t_1)$ al posto di $U(\mathbf{x}_1)$). Se, infine, definiamo

$$V(\mathbf{x}) := -U(\mathbf{x}) \quad \text{ENERGIA POTENZIALE}$$

$$E := T + V \quad \text{ENERGIA MECCANICA}$$

abbiamo dimostrato proprio il teorema di conservazione dell'energia meccanica:

$$E = T + V = \text{costante} \quad \text{ovvero} \quad \frac{dE}{dt} = 0 \quad (4.2)$$

5 Definizioni equivalenti

Si equivalgono le seguenti caratterizzazioni di forza conservativa:

1. il lavoro compiuto non dipende dal cammino percorso;
2. il lavoro compiuto su una curva chiusa è uguale a zero;
3. la forza è derivabile da un potenziale (è uguale al gradiente di un potenziale);
4. il lavoro elementare è un differenziale esatto;
5. $\nabla \times \mathbf{F} = 0$: è nullo il rotore della forza.

proprio l'ultima definizione richiede un chiarimento: il rotore è un vettore definito, in termini delle componenti cartesiane, dallo sviluppo del determinante

$$\det \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \text{etc.}$$

C'è un importante teorema (di Stokes) che mette in relazione integrali di superficie con integrali di linea:

$$\int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

dove Σ è la superficie a cui si estende il calcolo dell'integrale di sinistra (e $d\mathbf{S}$ è l'elemento di superficie); a destra c'è un integrale curvilineo, su una curva chiusa: la curva che contorna Σ . Se la forza è conservativa si annulla l'integrale di sinistra e, di conseguenza, il rotore della forza.

Esercizio: con le definizioni a disposizione si provi che, comunque si scelga $U(\mathbf{x})$,

$$\nabla \times (\nabla U) = 0;$$

conseguentemente, l'annullarsi del rotore implica l'esistenza di un gradiente.

Per quel che riguarda la definizione 4:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3$$

non è necessariamente il differenziale di una funzione, che abbiamo definito con l'eq. (3.2), perché non è detto che i coefficienti della combinazione lineare dei dx_i siano proprio le corrispondenti derivate parziali di una funzione. A questo livello dW è una **forma differenziale**. Se la forza è conservativa, come abbiamo visto, la forma differenziale è anche un differenziale o, come si dice nell'appropriato linguaggio, **una forma differenziale esatta**. Nel secondo esempio (quello di una forza non conservativa), il lavoro elementare è la forma differenziale:

$$dW = xy^2 dx + ye^x dy$$

e abbiamo provato che non è una forma differenziale esatta.

6 Forme differenziali chiuse ed esatte

Concludiamo con un esempio che induce a usare almeno un po' di cautela nell'applicare le definizioni appena studiate. Si consideri la forza

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

È sufficiente calcolare il lavoro compiuto da \mathbf{F} lungo una circonferenza centrata nell'origine e di raggio unitario, per verificare che questa forza non è conservativa; ricorriamo alla parametrizzazione già usata nell'esempio 2, caso (c), vale a dire al parametro $\theta \in [0, 2\pi]$. Si ha allora:

i) derivata prima e forza:

$$\mathbf{x}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \implies \frac{d\mathbf{x}}{d\theta} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}(\theta)) = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

ii) calcolo del lavoro su una curva chiusa:

$$W_{(a)} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{x}(\theta)) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta = 2\pi$$

dunque il lavoro su un percorso chiuso è diverso da zero.

Si consideri però anche una scelta differente di percorso chiuso; facciamo riferimento alla figura del secondo esempio: si percorra l'arco di circonferenza da $A = (1, 0)$ a $B = (0, 1)$ e si torni in A percorrendo la retta $y = -x + 1$ da B a A . Basta sostituire l'espressione della forza a quella dell'esempio 2, e si ha:

$$\begin{aligned} W_{\text{tot}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta + \int_1^0 \begin{pmatrix} \frac{-y}{1 - 2y + 2y^2} \\ \frac{-y + 1}{1 - 2y + 2y^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dy = \\ &= \frac{\pi}{2} + \int_1^0 \frac{dy}{1 - 2y + 2y^2} dy = \frac{\pi}{2} + \left| -\arctan(1 - 2y) \right|_1^0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 3\frac{\pi}{4} = 0. \end{aligned}$$

Questo risultato è generalizzabile: si annulla il lavoro su tutte le curve chiuse che non contengono l'origine; è come dire che la forza non è conservativa *dappertutto*. Il fatto è che se proviamo a cercare un potenziale, abbiamo che la condizione

$$\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\partial U}{\partial y}$$

a essere rigorosi non ha soluzione, perché

$$U = \arctan \frac{y}{x}$$

non è una funzione (non rappresenta una legge di corrispondenza univoca): $\arctan \frac{\pi}{4} = \arctan 5 \frac{\pi}{4}$. Quando ci troviamo in situazioni come questa, in cui si può trovare un qualche aperto su cui è definito il potenziale, diciamo che il lavoro elementare è **una forma chiusa**. Tutte le forme differenziali esatte sono anche chiuse, il viceversa non è vero.

7 Costanti del moto

Supponiamo, per fissare le idee, che un problema differenziale sia descritto dalle tre equazioni

$$\dot{x}_k = f_k(x_1, x_2, x_3), \quad k = 1, 2, 3. \quad (7.1)$$

Questo sistema definisce un campo di "velocità", nel senso che in ogni punto del dominio delle f_k si può tracciare il vettore di componenti $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$. La sua soluzione, detta curva integrale, è tangente al campo di velocità ed è una curva parametrizzata. Un differente punto di vista geometrico consiste nell'individuare questa curva come intersezione di due superfici che sono integrali primi del sistema differenziale.

Per meglio comprendere questa affermazione, chiariamo prima di tutto alcune questioni di linguaggio.

1. Insieme di livello.

A ogni funzione definita sul dominio $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^3$,

$$f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$$

restano definiti, $\forall c \in \mathbb{R}$ gli **insiemi di livello**

$$f^{-1}(c) = \{m \in \mathbb{M} : f(m) = c\}$$

Dunque, per esemplificare, alla funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

si associano gli insiemi di livello **bidimensionali**

$$f^{-1}(r^2)$$

che sono tutte le sfere di raggio r e centro nell'origine. La sfera unitaria

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

è l'insieme di livello $f^{-1}(1)$.

Gli insiemi di livello non sono, in generale, grafici di funzioni (la sfera non lo è) ma sono superfici in \mathbb{R}^3 .

2. vettori tangenti e gradiente.

Per definire un vettore tangente a una superficie bidimensionale, su di essa ci deve essere una curva parametrizzata. In particolare, se parliamo di insieme di livello, un vettore \mathbf{w} è detto tangente all'insieme di livello $f^{-1}(c)$ se è il vettore velocità di una curva parametrizzata in \mathbb{R}^3 la cui immagine è contenuta in $f^{-1}(c)$.

Proposizione: ∇f in $m \in f^{-1}(c)$ è ortogonale a tutti i vettori tangenti a $f^{-1}(c)$ in m .

Dimostrazione: Ogni vettore tangente è la velocità di qualche curva parametrizzata nel punto di tangenza.

I punti di una curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda)$ che giace sulla superficie² $F(\mathbf{x}) = c$, soddisfano

$$F(\mathbf{x}(\lambda)) = c.$$

Derivando questa relazione rispetto al parametro, si ha

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{dx_i}{d\lambda} = 0$$

che equivale a

$$\nabla F \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda} = 0$$

quindi il gradiente è, in ciascun punto, perpendicolare a qualsiasi vettore tangente.

Chiederemo, ancora, che ∇F non sia identicamente nullo. Con ciò si richiede che localmente la superficie possa essere espressa come funzione. Supponiamo che

$$\nabla F = (0 \ 0 \ 1)$$

allora per il teorema della funzione implicita, essendo $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, si può localmente esprimere

$$z = z(x, y).$$

Definizione: Una funzione $G(x, y, z)$ è un integrale primo del sistema (7.1) se in ogni punto il campo di velocità è ortogonale a ∇G :

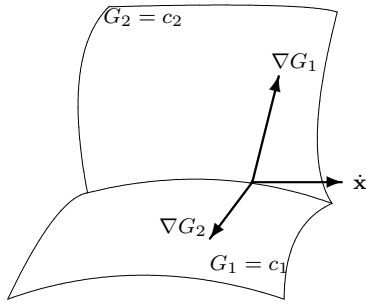
$$\dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla G = f_1 \frac{\partial G}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial G}{\partial x_2} + f_3 \frac{\partial G}{\partial x_3} = 0.$$

Si noti che tale relazione è del tutto equivalente alla

$$\frac{dG}{dt} = 0 \tag{7.2}$$

in quanto la derivata totale rispetto al tempo (regola della derivata di funzione composta) tiene conto della dipendenza implicita delle coordinate dal tempo. La (7.2) esprime il fatto che la funzione G non varia durante il moto, che cioè mantiene il valore che aveva all'istante iniziale. G è anche detta **costante del moto**. Gli integrali primi (o costanti del moto) generalizzano le relazioni che conosciamo come **leggi di conservazione** e che si riferiscono al fatto che quantità come l'energia, la quantità di moto, il momento angolare, sotto certe condizioni, conservano il loro valore iniziale.

²Osservazione: ogni valore di c (per esempio ogni valore del raggio della sfera) individua una particolare superficie; più propriamente $F(\mathbf{x}) = c$, rappresenta una famiglia a un parametro di superfici.



Due insiemi di livello, corrispondenti agli integrali primi $G_1 = c_1$ e $G_2 = c_2$, si intersecano in una curva. Per evitare che le due superfici siano parallele, richiediamo che in ogni punto i due gradienti non siano paralleli:

$$\nabla G_1 \wedge \nabla G_2 \neq \mathbf{0}.$$

I gradienti sono ortogonali alle rispettive superfici e, entrambi, al vettore velocità, tangente alla curva integrale.

La rappresentazione geometrica suggerisce che la ricerca di costanti del moto è una via alternativa all'integrazione delle equazioni differenziali. Tornando all'esempio del moto del proiettile, abbiamo due costanti del moto: l'energia meccanica e la componente orizzontale della quantità di moto

$$\begin{aligned} \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + mgx_2 &= E = \frac{m}{2}(\dot{x}_{01}^2 + \dot{x}_{02}^2) \\ m\dot{x}_1 &= m\dot{x}_{01}. \end{aligned}$$

Sostituendo la seconda nella prima, si ottiene

$$\dot{x}_2 = \sqrt{\dot{x}_{02}^2 - 2gx_2} \implies \frac{dx_2}{\sqrt{\dot{x}_{02}^2 - 2gx_2}} = dt$$

Integrando, si ha

$$t = \left| -\frac{1}{g} \sqrt{\dot{x}_{02}^2 - 2gx_2} \right|_0^{x_2} \implies x_2(t) = \dot{x}_{02}t - g\frac{t^2}{2}.$$

Si noti che al variare delle condizioni iniziali le costanti del moto variano il loro valore numerico, e, come già fatto osservare in precedenza, le superfici che le rappresentano costituiscono una famiglia che riempie lo spazio dove evolve il sistema. Da un lato, a ogni condizione iniziale corrisponde una e una sola soluzione e, al variare delle condizioni iniziali, le curve integrali riempiono con continuità lo spazio; d'altro canto le famiglie di superfici si intersecano proprio nelle curve integrali e al variare dei parametri c_1 e c_2 descrivono l'intero insieme delle curve integrali.