

1 AMPLIAMENTO DELLO SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI

1.1 Fibrato tangente allo spazio delle configurazioni

Prima ancora di sviluppare il formalismo conseguente al principio di Hamilton, la meccanica di Lagrange presenta già risultati che la distinguono dalla meccanica newtoniana. In particolare, ci riferiamo al procedimento sistematico di riduzione del numero delle variabili che descrivono il moto del sistema e del numero delle equazioni differenziali del moto mediante i vincoli olonomi, o, meglio, mediante le equazioni che li rappresentano. Per ottenere tale risultato si devono esplicitare, mediante le equazioni dei vincoli, le $3N$ variabili cartesiane in funzione delle n (numero dei gradi di libertà) variabili lagrangiane. Dal punto di vista geometrico ciò equivale a ridurre lo spazio $3N$ -dimensionale delle coordinate di laboratorio a un sottospazio n -dimensionale le cui coordinate sono le variabili lagrangiane q_1, q_2, \dots, q_n : lo spazio delle configurazioni \mathbb{Q} , su cui il punto rappresentativo $P = P(q_1(t), \dots, q_n(t))$ descrive una curva parametrizzata dal tempo che, istante per istante, specifica le configurazioni del sistema.

\mathbb{Q} è uno *spazio curvo*, le sue coordinate sono curvilinee: quali proprietà di uno spazio euclideo sono conservate, quali perdute? È possibile, con le nuove coordinate, utilizzare il calcolo differenziale e integrale, peraltro indispensabile nei problemi della meccanica?

La riduzione delle variabili operata mediante la trasformazione $(x_1, \dots, z_N) \rightarrow (q_1, \dots, q_n)$ porta a spazi che definiamo **sottovarietà dello spazio euclideo** di cui consideriamo un elementare esempio: quello di un punto vincolato a muoversi sulla superficie di una sfera. Le coordinate curvilinee più idonee sono quelle sferiche, la cui relazione con le coordinate cartesiane è data da:

$$x = \rho \cos \theta \sin \phi; \quad y = \rho \sin \theta \sin \phi; \quad z = \rho \cos \phi.$$

Inoltre, scegliamo per il punto libero le coordinate lagrangiane

$$q_1 = \theta, \quad q_2 = \phi, \quad q_3 = \rho - a,$$

dove a è il raggio della sfera $S^2 : x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$;

lo spazio delle configurazioni del sistema vincolato è allora determinato dall'annullarsi della coordinata sovrabbondante. Senza entrare in ulteriori dettagli, questa possibilità di scegliere le coordinate generalizzate in modo che r ($= n^\circ$ vincoli olonomi) di esse si annullino è ciò che caratterizza \mathbb{Q} come sottovarietà di \mathbb{R}^{3N} : dunque, per fissare le idee, \mathbb{Q} è una superficie regolare in \mathbb{R}^{3N} come la sfera è una superficie regolare in \mathbb{R}^3 . Il termine regolare si riferisce al fatto che le funzioni che permettono di esprimere $3N$ coordinate mediante n coordinate generalizzate si suppongono essere differenziabili.

Usiamo il termine sottovarietà e non quello di sottospazio in quanto con questo tipo di riduzione da \mathbb{R}^{3N} a suoi sottoinsiemi di punti si perdono alcune caratteristiche degli spazi euclidei. Infatti, lo spazio delle configurazioni è ora la sfera S^2 ; la metrica che è definita su tale spazio è data da

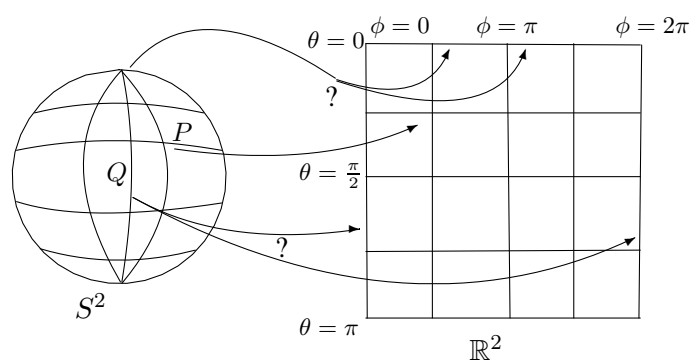
$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

e non da $ds^2 = d\theta^2 + d\phi^2$, come invece è per lo spazio euclideo \mathbb{R}^2 .

Ma prima ancora che le proprietà metriche che, per ora, esulano dai nostri scopi, si devono confrontare le proprietà topologiche e richiedere per il nostro spazio requisiti minimali che ci permettano di formulare e trattare i problemi meccanici. Dobbiamo almeno individuare i punti di \mathbb{Q} con un sistema di coordinate di \mathbb{R}^n e, inoltre, definire un calcolo differenziale che, se esplicitato in termini delle coordinate di \mathbb{R}^n , sia riconducibile all'ordinario calcolo definito su quest'ultimo spazio (studiando l'evoluzione del punto rappresentativo dobbiamo, p. es., scrivere su \mathbb{Q} delle equazioni differenziali, oppure valutare delle variazioni ecc.). Se ciò è possibile diremo che \mathbb{Q} è una varietà differenziabile.

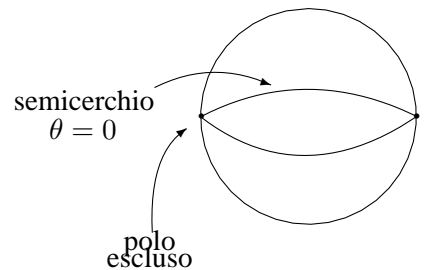
Prima di passare a una definizione rigorosa di varietà differenziabile, precisiamo meglio quali problemi si incontrano se si vuole coordinatizzare uno spazio come \mathbb{Q} e, per esemplificare, restiamo sull'esempio di S^2 . Immaginiamo, per rifarci a un terreno meno astratto, di ripercorrere quella costruzione geografica imparata a scuola, che associava a ogni punto della terra una coppia di numeri: la latitudine e la longitudine.

Quando si tracciano meridiani e paralleli sulla sfera si individua ciascun punto su di essa mediante i corrispondenti valori di θ e ϕ : sembrerebbe possibile, a prima vista, associare biunivocamente tutti i punti di S^2 con un aperto di \mathbb{R}^2 . Ci sono invece alcuni punti che danno luogo a situazioni patologiche:



(a) il polo Nord corrisponde in \mathbb{R}^2 a tutta la retta $\theta = 0$ (e il polo Sud a quella $\theta = \pi$).
 (b) i punti sul meridiano in figura corrispondono sia a $\phi = 0$ che a $\phi = 2\pi$.

Dobbiamo dunque restringere la mappa al rettangolo aperto $\theta \in (0, \pi)$ $\phi \in (0, 2\pi)$, al fine di ottenere un'applicazione biunivoca tra punti della sfera e un aperto di \mathbb{R}^2 (quando tale applicazione è un omeomorfismo, la mappa e l'aperto di \mathbb{R}^2 costituiscono una carta per la regione della sfera considerata). Osserviamo, però, che in tal modo non vengono coordinatizzati nè i due poli nè il semicerchio $\phi = 0$. Dovremo perciò scegliere (almeno) una seconda carta in modo che tutti i punti del nostro spazio siano in relazione biunivoca e bicontinua con un sistema di coordinate di \mathbb{R}^2 .

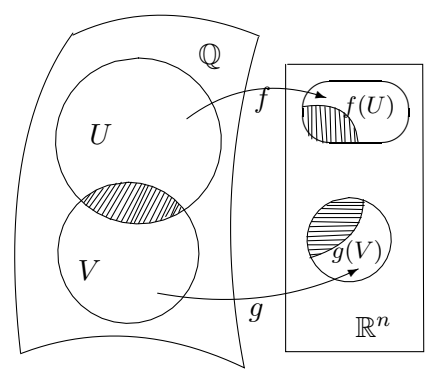


Per semplicità conviene scegliere come carta l'aperto

$$\theta \in (0, 2\pi) \quad \phi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) :$$

da tale carta restano esclusi i due punti all'equatore ed il semicerchio che li congiunge evidenziati in figura.

Riassumendo: è necessario che esista un sistema di carte (un atlante) in modo che ogni punto di \mathbb{Q} sia individuato da almeno un sistema di coordinate e nel modo visto nell'esempio; ma non basta: ci deve essere una compatibilità tra le carte:



i mappings

$$f \circ g^{-1} : g(U \cap V) \rightarrow f(U \cap V)$$

(che forniscono una trasformazione di coordinate per i punti di $U \cap V$) devono essere dei diffeomorfismi. In tal modo nel passaggio da una carta all'altra si mantengono le stesse proprietà differenziali.

Una sottovarietà di uno spazio euclideo è, dunque, un sottospazio localmente euclideo; col termine di varietà differenziabile intenderemo una generalizzazione, un'astrazione di tale concetto; una sottovarietà di uno spazio euclideo è sempre una varietà differenziabile.

La compatibilità delle carte caratterizza l'intero spazio \mathbb{Q} ; essa stabilisce una transizione tra le descrizioni matematiche che vari osservatori (ciascuno con la propria carta) danno di un fenomeno fisico che avviene in una data configurazione. I requisiti minimi che chiediamo affinché, per tutti, *la fisica sia la stessa* sono, per prima cosa, che tutte le carte abbiano valori in spazi euclidei di uguale dimensione (la biunivocità garantisce che il numero di gradi di libertà sia lo stesso per tutti gli osservatori) e che le proprietà differenziali attribuite al sistema fisico in ogni posizione siano le stesse (differenziabilità della funzione di transizione). Questi requisiti sono fondamentali per mostrare che proprietà o entità matematiche (funzioni, tensori, equazioni, etc) non dipendono dalle carte, hanno cioè validità generale (intrinseca): un buon esempio per tale concetto, lo abbiamo già incontrato discutendo la covarianza delle equazioni di Lagrange; in tale ambito la varietà è costituita non solo da \mathbb{Q} , ma (come vedremo poco più avanti) anche dagli spazi tangenti in ogni suo punto. Richiedendo che le trasformazioni di punto siano dei diffeomorfismi, si garantisce che

- le equazioni differenziali del moto mantengono la loro forma in ogni carta;
- la funzione di Lagrange assume gli stessi valori, indipendentemente dalla carta.

Dunque, le equazioni di Eulero-Lagrange e la funzione di Lagrange sono definite sulla varietà, non devono la loro definizione a una particolare scelta di coordinate.

In conclusione, e con rigore soddisfacente, diremo che

\mathbb{Q} è una varietà differenziabile se:

- (i) è uno spazio di Hausdorff; ¹
- (ii) è possibile definire un atlante costituito da carte compatibili.

Anche se in possesso di tali caratteristiche, lo spazio delle configurazioni risulta in realtà inadeguato a rappresentare il moto di un sistema lagrangiano; come vedremo, diverrà opportuno ampliare tale spazio ad una varietà differenziabile di dimensione doppia.

Supponiamo che la funzione di Lagrange del sistema sia regolare, cioè che sia invertibile la matrice $(W_{ik}) = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right)$, ovvero che

$$\det W \neq 0. \quad (1.1)$$

In tal caso le equazioni di Lagrange danno luogo ad un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine (di rango $2n$) in forma normale ²:

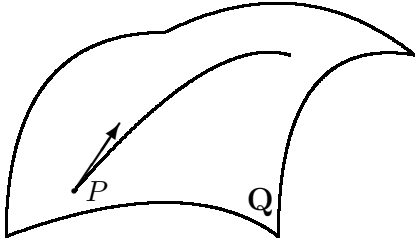
$$\ddot{q}_k = (W_{ik})^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial t \partial \dot{q}_i} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j \right) \quad k = \overline{1, n}. \quad (1.2)$$

Tale sistema ha $2n$ costanti di integrazione e le soluzioni dipenderanno dalle condizioni iniziali

$$\begin{cases} q_{i0} = q_i(t_0) \\ \dot{q}_{i0} = \dot{q}_i(t_0) \end{cases} \quad i = \overline{1, n}$$

¹Questa è una proprietà comune a \mathbb{R}^n : presi due punti qualsiasi di \mathbb{Q} , essi hanno sempre intorni con intersezione nulla.

²In tutte le formule di queste note si sottintende la convenzione di Einstein sugli indici ripetuti.

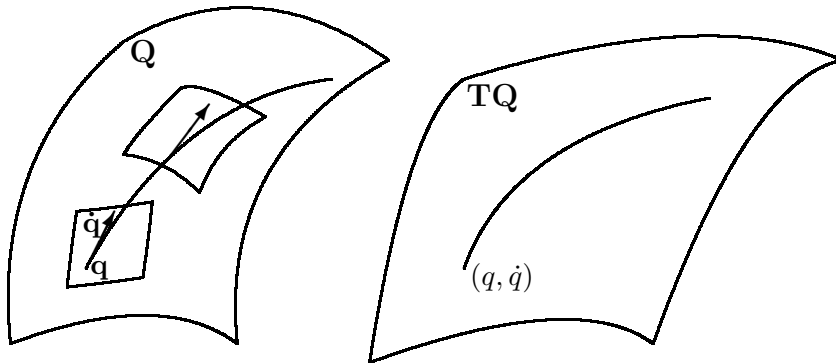


Nello spazio delle configurazioni possiamo rappresentare solo la configurazione iniziale e così il punto rappresentativo può avere una velocità iniziale arbitraria; una curva nello spazio delle configurazioni rappresenta l'orbita e non fornisce alcuna informazione sulla velocità di transito del punto rappresentativo attraverso ciascun suo punto.

Affinché una curva rappresenti la traiettoria del sistema dobbiamo associare ad ogni punto dello spazio delle configurazioni lo spazio tangente in quel punto. Tale spazio ha dimensione n e, scelta una base su di esso, possiamo esprimere mediante le sue coordinate $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ le componenti del vettore velocità in quel punto. Nel linguaggio della geometria differenziale lo spazio tangente nel punto $P(q_1, \dots, q_n)$ è detto fibra nel punto P . Ad ogni punto dello spazio delle configurazioni \mathbb{Q} è associata una fibra $T_P\mathbb{Q}$. L'unione di tutte le fibre passanti per tutti i punti di \mathbb{Q}

$$\bigcup_{P \in \mathbb{Q}} T_P\mathbb{Q} = T\mathbb{Q}$$

è detta fibrato tangente allo spazio delle configurazioni ed ogni punto ha coordinate locali $q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$. Specificare la curva descritta dal punto rappresentativo in questo spazio, significa specificare la traiettoria del sistema (cioè, istante per istante, sia la configurazione del sistema che la velocità del punto rappresentativo).



Si noti che i vettori tangenti non appartengono allo spazio delle configurazioni. Questa è un ulteriore elemento di diversità tra uno spazio euclideo e una varietà differenziabile: nel moto di due particelle in \mathbb{R}^3 la differenza delle due velocità $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ ha un preciso significato fisico, è la velocità relativa; il confronto avviene *trasportando* i vettori fino a fare coincidere i punti di applicazione. Se due punti si muovono su una sfera, viceversa, i rispettivi vettori velocità appartengono a due spazi tangenti distinti e non correlati; la differenza tra i vettori velocità non giace in nessuno dei due spazi tangenti, nè ha un qualche significato fisico descrivibile sulla sfera.

1.2 Lifting della dinamica a spazi di supporto.

L'effetto dello sdoppiamento delle variabili visto sopra, oltre a rendere non ambigua la rappresentazione del moto, consiste anche nel trasformare il sistema di n equazioni del secondo ordine in uno (dello stesso rango, ovviamente) di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine.

Infatti, indicando con u_i le coordinate delle fibre, abbiamo ora le seguenti $2n$ equazioni del primo ordine in forma normale nelle $2n$ variabili (q_i, u_i) :

$$\frac{dq_i}{dt} = u_i \quad \frac{du_i}{dt} = (W_{ki})^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k \partial q_j} \dot{q}_j - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k \partial t} \right) \quad (1.3)$$

Ciò dovrebbe chiarire il nuovo ruolo di variabile indipendente della \dot{q} : anche se la relazione $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ induce a pensare ad una sorta di dipendenza dalle q , giova ricordare che non è nota a priori la legge finita del moto

$$q_i = q_i(q_0, \dot{q}_0, t) \quad i = \overline{1, n};$$

(e se poi il sistema non è integrabile, non riusciremo in alcun modo a pervenire a tale legge). In ogni caso la derivata temporale delle q non è una funzione nota a priori.

È importante poi sottolineare che il procedimento usato per sdoppiare le equazioni del II ordine non è univoco. Come è noto dalla teoria delle equazioni differenziali, ad ogni sistema normale di rango $2n$ in n funzioni incognite

$$\ddot{x}_i = F_i(x, \dot{x}, t) \quad i = \overline{1, n}$$

si può sostituire in infiniti modi un sistema equivalente, dello stesso rango, costituito da $2n$ equazioni del I ordine in forma normale: basta assumere, per es., come nuove incognite, accanto alle vecchie n funzioni incognite, le loro n derivate prime:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = y_i \\ \dot{y}_i = F_i(x, y, t). \end{cases} \quad i = \overline{1, n}$$

Ma, piú in generale, si possono introdurre n nuove arbitrarie funzioni indipendenti delle vecchie variabili e delle loro derivate prime:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \phi_i(x, z, t) \\ \dot{z}_i = \psi_i(x, z, t). \end{cases} \quad i = \overline{1, n}$$

Ciascuno di questi procedimenti di ampliamento dello spazio rappresentativo e di scelta delle nuove n variabili aggiuntive dovrà comunque mantenere la soluzione

$$x_i = x_i(x_0, t) \quad i = \overline{1, n},$$

vale a dire che tutte le curve descritte dai punti rappresentativi nella loro evoluzione sui rispettivi spazi di supporto si dovranno proiettare sulla medesima orbita nello spazio delle configurazioni. Tutte i procedimenti di ampliamento che soddisfano tale proprietà costituiscono un lifting al relativo spazio di supporto.

Esempio 1.1: *si studino due diversi lifting per l'oscillatore armonico unidimensionale $\ddot{x} = -\omega^2 x$.*

Il lifting al fibrato tangente è
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x. \end{cases}$$

Introduciamo d'altro canto la variabile $z = \sinh \dot{x}$: abbiamo allora che

$$\dot{z} = \cosh \dot{x} \ddot{x} = -\omega^2 x \sqrt{1 + \sinh^2 \dot{x}},$$

da cui
$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{arcsinh} z \\ \dot{z} = -\omega^2 x \sqrt{1 + z^2}. \end{cases}$$

Inoltre, la soluzione $x = \frac{x_0}{\cos \alpha} \cos(\omega t + \alpha)$ soddisfa entrambi i sistemi.

Esempio 1.2: punti di equilibrio in un sistema scleronomo.

Quando si studiano le piccole oscillazioni attorno a una configurazione di equilibrio, si suppone che i vincoli siano fissi. Conseguentemente, l'energia cinetica è una forma quadratica omogenea delle \dot{q} :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} W_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k - V(q).$$

Le equazioni di Lagrange sono, per la (1.3),

$$\frac{dq_i}{dt} = u_i \quad \frac{du_i}{dt} = (W_{ki})^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k \partial q_j} \dot{q}_j \right)$$

Un punto di equilibrio (o punto fisso) rappresenta, per un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, una particolare condizione iniziale. Se infatti all'istante iniziale un sistema è descritto dalle coordinate di tale punto, vi permarrà in ogni istante successivo. Nel caso delle equazioni di Lagrange, la condizione di equilibrio è soddisfatta da quei punti del fibrato tangente nei quali le velocità \dot{q}_i e \dot{u}_i sono tutte nulle. Conseguentemente, devono essere soddisfatte le n equazioni

$$\frac{du_i}{dt} = (W_{ki})^{-1} \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

ottenute dall'annullamento delle \dot{q}_i . Questa condizione mostra che una configurazione

$$(q_{01}, \dots, q_{0n})$$

è di equilibrio se e solo se

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_k} \right|_{q_k=q_{0k}} = 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Queste equazioni, d'altra parte, sono n equazioni in n incognite e determinano la configurazione d'equilibrio. Naturalmente la stabilità dell'equilibrio richiede ulteriori condizioni su V .

2 RIDUZIONE DI SISTEMI LAGRANGIANI.

Lo studio del teorema di Noether ci ha permesso di esprimere leggi di conservazione ogniqualvolta la funzione di Lagrange presenta proprietà di simmetria. Vediamo ora, almeno nei casi più semplici, come utilizzare tale informazione per affrontare il problema dell'integrazione delle equazioni differenziali del moto.

Supponiamo che le equazioni del moto siano già scritte nella forma

$$\dot{z}_i = \psi_i(z, t) \quad (i = \overline{1, 2n}), \quad (2.1)$$

e che esistano $r \leq 2n$ funzioni

$$f_j = f_j(z, t) \quad (j = \overline{1, r}) \quad (2.2)$$

che, durante il moto del punto rappresentativo, rimangono costanti. Ciò significa che, se

$$z_i = \phi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}, t) \quad (i = \overline{1, 2n})$$

rappresenta la soluzione del moto, gli integrali primi della (2.1) soddisfano

$$f_j(\phi, t) \equiv \beta_j.$$

Gli integrali primi sono dunque funzioni che non dipendono implicitamente dal tempo:

$$\frac{df_j}{dt} = 0.$$

Se le (2.2) sono tra loro indipendenti ed invertibili, si possono esprimere r incognite z mediante le rimanenti $(2n - r)$ e il tempo t :

$$z_j = \psi_j(z_{r+1}, \dots, z_{2n}, \beta, t) \quad (j = \overline{1, r})$$

Se poi vi sono $2n$ integrali primi, allora si possono ricavare $2n$ relazioni

$$z_i = z_i(\beta, t) \quad (i = \overline{1, 2n}),$$

che, d'altra parte, forniscono la soluzione del moto.

Gli integrali primi del moto sono la soluzione dell'equazione differenziale alle derivate parziali

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial z_i} \dot{z}_i + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

che, come mostreremo, ha $2n$ soluzioni indipendenti. La ricerca di costanti del moto è allora in tal senso una via alternativa per l'integrazione delle equazioni differenziali.

Dal punto di vista geometrico, ciascuna equazione $f_i = \alpha_i$ definisce una (iper-)superficie a $(2n - 1)$ dimensioni e l'intersezione di $2n$ ipersuperfici coincide proprio con la curva oraria che soddisfa la (2.1).

Esempio 2.1: Si cerchino gli integrali primi del moto per un oscillatore armonico.

Essendo $\ddot{q} = -q$ l'equazione del moto di un oscillatore armonico, cercheremo le soluzioni dell'equazione:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} - \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} q = 0.$$

Due soluzioni indipendenti sono

$$f_1 = q^2 + \dot{q}^2 \quad \text{e} \quad f_2 = t - \text{artan} \frac{q}{\dot{q}};$$

invertendo tali relazioni, si ottiene l'integrale generale della (2.1)

$$q = \sqrt{f_1} \sin(t - f_2).$$

⊙

Esempio 2.2: Il moto di un proiettile.

In questo caso le soluzioni del moto si ottengono integrando senza difficoltà le equazioni $\ddot{x} = 0$ e $\ddot{y} = -g$:

$$x = \dot{x}_0 t + x_0 \quad (2.3a)$$

$$y = \dot{y}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + y_0. \quad (2.3b)$$

Consideriamo ora la funzione $f = y + x^2 - x$ e valutiamo la sua dipendenza temporale sulle curve del moto (2.3): in generale la forma funzionale di f cambierà dando luogo alla funzione

$$g = f(x(t, \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0), y(t, \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0), t) = \left(\dot{x}_0^2 - \frac{g}{2} \right) t^2 + (\dot{y}_0 + 2x_0 \dot{x}_0 - x_0) t + y_0 - x_0 + x_0^2.$$

Si noti che la funzione g deve dipendere da almeno una condizione iniziale: se ciò non avvenisse, avremmo che $g = g(t)$ lungo tutte le soluzioni del moto: dunque, indipendentemente dalle condizioni iniziali, avremmo che

$$y + x^2 - x = g(t);$$

ma questo sarebbe un vincolo (olonomo), risultato non ammissibile in quanto il nostro sistema ha due gradi di libertà. ⊙

Questo esempio è generalizzabile: ogni funzione $f(z, t)$ (non banale, come $f = f(t)$), valutata lungo le (2.1), deve dipendere esplicitamente dalle costanti di integrazione:

$$f(z(t, \alpha), t) = g(t, \alpha) \implies \frac{\partial g}{\partial \alpha_i} \neq 0 \text{ per almeno una delle } \alpha_i;$$

In caso contrario, si ha un vincolo (olonomo o non olonomo) privo di giustificazione. Premesse queste considerazioni, possiamo mostrare il seguente, fondamentale,

Teorema: *un sistema meccanico con n gradi di libertà ammette esattamente $2n$ costanti del moto.*

Dimostrazione: per ogni funzione $f(z, t)$, per quanto detto sopra,

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial f}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1, 2n); \quad (2.4)$$

la (2.4), d'altra parte, costituisce un sistema lineare non omogeneo nelle $2n$ incognite $\frac{\partial f}{\partial z_j}$. Il sistema ammette un'unica soluzione se la matrice dei coefficienti è non singolare:

$$\det \left(\frac{\partial z_j}{\partial \alpha_i} \right) \neq 0.$$

Quest'ultima condizione è, d'altra parte, la condizione sullo jacobiano di una trasformazione

$$z_i \longrightarrow \alpha_i$$

affinché essa sia invertibile e porti a $2n$ funzioni indipendenti. Allora, potremo esprimere $2n$ funzioni

$$\alpha_i = \alpha_i(z, t)$$

che, essendo le α costanti, sono costanti del moto indipendenti.

Si noti che il teorema garantisce solo che esiste una trasformazione per esprimere le costanti di integrazione in termini delle coordinate, ma non fornisce un criterio per costruirla.

2.1 Riduzione del problema dinamico in presenza di variabili cicliche

La conoscenza di integrali del moto diviene ancora più importante se il moto in questione è lagrangiano. Per dare prova di questa affermazione consideriamo una particolare classe di costanti del moto, quelle coniugate a variabili cicliche (o ignorabili): supponiamo infatti che un sistema sia descritto da una lagrangiana che non dipende esplicitamente dalle prime r coordinate:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$$

dove useremo l'indice k per l'intervallo $(1, r)$; j invece varierà in $(r + 1, n)$ e, infine, i in $(1, n)$.

Dalle equazioni di Lagrange abbiamo che

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0 \implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \alpha_k;$$

da queste ultime r costanti del moto si possono esprimere r velocità generalizzate \dot{q}_k in termini delle altre $2(n - r)$ variabili residue.

Introduciamo adesso la cosiddetta funzione di Routh

$$R(q_j, \dot{q}_j, \alpha_k) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L} - \dot{q}_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}, \quad (2.5)$$

la cui prima variazione è data da:

$$\delta R = \frac{\partial R}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \frac{\partial R}{\partial \alpha_k} \delta \alpha_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k - \dot{q}_k \delta \alpha_k.$$

Da questo calcolo deduciamo che

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{\partial R}{\partial q_j}; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \quad \dot{q}_k = - \frac{\partial R}{\partial \alpha_k}.$$

Conseguentemente si possono riscrivere le equazioni del moto:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \longrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R}{\partial q_j} = 0$$

che vanno pensate unite a

$$q_k = - \int \frac{\partial R}{\partial \alpha_k} dt.$$

Quest'ultima è integrabile non appena si sono risolte le precedenti equazioni che forniscono l'evoluzione temporale per le q_j .

Si osservi che, in definitiva, un sistema di rango $2n$ è stato ridotto ad uno di rango $2(n - r)$: ogni costante del moto riduce di due il rango del problema (o alternativamente di uno il numero dei gradi di libertà del sistema). Precedentemente avevamo stabilito che ogni costante del moto riduce di uno tale rango: non c'è contraddizione, è solo che le α_k sono costanti lungo le curve integrali di una meccanica lagrangiana e, per questa particolarità, *valgono il doppio*. Anche se non possiamo generalizzare nè, per ora, formalizzare il problema, sottolineiamo che questo risultato pone ancora una volta in rilievo la ricchezza del formalismo lagrangiano.

Esempio 2.3: Si studi il sistema descritto dalla funzione di Lagrange:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2(a + bq_2^2)} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 - cq_2^2 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

Seguendo la teoria, la costante coniugata alla variabile ciclica q_1 è

$$\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\dot{q}_1}{a + bq_2^2}$$

invertendo, $\dot{q}_1 = \alpha(a + bq_2^2)$. La funzione di Routh è

$$R = -\frac{\alpha^2}{2}(a + bq_2^2) + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 - cq_2^2$$

che dà luogo alle equazioni:

$$\begin{cases} \ddot{q}_2 + \alpha^2 bq_2 + 2cq_2 = 0 \\ q_1 = -\int -\alpha(a + bq_2^2) dt \end{cases}$$

L'integrazione della prima è immediata, poiché essa coincide formalmente con quella di un oscillatore armonico. Otteniamo dunque:

$$q_2 = A \cos(\sqrt{\alpha^2 b + 2c}t + \phi);$$

alla luce di questo risultato l'equazione per la variabile ciclica è:

$$q_1 = \alpha at + \alpha b A^2 \int \cos^2(\sqrt{\alpha^2 b + 2c}t + \phi) dt$$

che si integra facilmente.

Vedremo adesso come, seguendo un procedimento simile a quello usato, quando sussiste l'integrale dell'energia

$$\dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} = \text{cost.}$$

(cioè quando il tempo è una variabile ciclica), si può introdurre una funzione che rappresenta la lagrangiana per un sistema a $n - 1$ gradi di libertà. Sottolineiamo che in tal caso, come in quello della funzione di Routh l'intero formalismo lagrangiano mantiene la sua validità.

2.2 Riduzione del problema dinamico mediante l'equazione dell'energia

Scegliamo come variabile indipendente una coordinata lagrangiana al posto del tempo: per fare ciò è sufficiente considerare la soluzione $q_i = q_i(t)$ e invertire una di queste n relazioni; richiediamo inoltre (per quello che seguirà) che la velocità generalizzata corrispondente a tale coordinata lagrangiana non si annulli mai. Per fissare le idee, invertiamo l'equazione:

$$q_1 = q_1(t).$$

Conseguentemente,

$$\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dq_1} \frac{dq_1}{dt} = q'_k \dot{q}_1 \quad (k = \overline{2, n})$$

(d'ora in poi sarà sottinteso che l'indice i varia da 1 a n mentre k da 2 a n).

Introduciamo $\Omega(q_i, \dot{q}_1, q'_k) = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$ e deriviamo questa uguaglianza rispetto alle q e \dot{q} :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \Omega}{\partial q'_k} \frac{\partial q'_k}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} = -\frac{\dot{q}_k}{\dot{q}_1^2} \frac{\partial \Omega}{\partial q'_k} + \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{1}{\dot{q}_1} \frac{\partial \Omega}{\partial q'_k} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{\partial \Omega}{\partial q_i} \quad (2.8)$$

La prima e la seconda di queste equazioni implicano che

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}. \quad (2.9)$$

Facciamo finalmente l'ipotesi di studiare sistemi per i quali sussista l'integrale dell'energia:

$$E = \text{cost.} = \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} = \dot{q}_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \Omega; \quad (2.10)$$

moltiplicando la (2.9) per \dot{q}_1 si vede che la (2.10) equivale a

$$E = \dot{q}_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} - \Omega. \quad (2.11)$$

Ora usiamo l'integrale dell'energia per ricavare \dot{q}_1 in funzione delle variabili q_i e q'_k . Da questo punto in poi, tutte le volte che deriviamo una funzione che dipende da tutte le $2n$ variabili (come Ω o il termine di destra della (2.11)) dobbiamo tener conto della dipendenza implicita della \dot{q}_1 dalle altre variabili. Così, derivando prima rispetto a q_i e poi rispetto a q'_k entrambi i membri della (2.11) si ottengono, nell'ordine, le uguaglianze:

$$0 = \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_i} \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_1 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_i} + \dot{q}_1 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial q_i \partial \dot{q}_1} - \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_i} - \frac{\partial \Omega}{\partial q_i} \quad (2.12)$$

$$0 = \dot{q}_1 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_k} + \dot{q}_1 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial q'_k \partial \dot{q}_1} - \frac{\partial \Omega}{\partial q'_k}. \quad (2.13)$$

Infine, terminiamo questi calcoli preliminari operando analoghe derivazioni sulla funzione

$$\mathcal{L}' = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1}. \quad (2.14)$$

Avremo, rispettivamente,

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial q_i \partial \dot{q}_1} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q'_k} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_k} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial q'_k \partial \dot{q}_1}. \quad (2.16)$$

Confrontando (2.12) con (2.15) e (2.13) con (2.16), si ha, rispettivamente,

$$\dot{q}_1 \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_i} = \frac{\partial \Omega}{\partial q_i}; \quad \dot{q}_1 \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q'_k} = \frac{\partial \Omega}{\partial q'_k},$$

che, alla luce delle (2.8) e (2.7) forniscono infine

$$\dot{q}_1 \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}; \quad \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q'_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_k}.$$

Sostituendo queste ultime in $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$

si ottiene $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q'_k} \right) - \dot{q}_1 \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_k} = \frac{dq_1}{dt} \frac{d}{dq_1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q'_k} \right) - \dot{q}_1 \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_k} = 0 \implies$

$$\frac{d}{dq_1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q'_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_k} = 0 \quad (k = \overline{2, n}), \quad (2.17)$$

con $\mathcal{L}' = \mathcal{L}'(q_1, q_k, q'_k)$.

Le (2.17) sono equazioni di Lagrange con lagrangiana \mathcal{L}' per un sistema a $(n - 1)$ gradi di libertà e con variabile indipendente q_1 . La soluzione di questo problema è rappresentata da $q_k = q_k(q_1)$; sostituendo quest'ultima in $\dot{q}_1 = \dot{q}_1(q_i, q'_k)$ precedentemente esplicitata tramite $E = \text{cost.}$, si ottiene anche $q_1 = q_1(t)$ e così la soluzione completa del moto.

Esempio 2.4: un sistema meccanico a due gradi di libertà sia descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}f(q_2)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 - g(q_2);$$

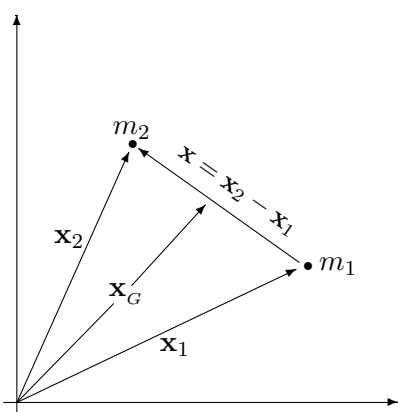
si provi che $\mathcal{L}' = \sqrt{(2E - 2g)(f + q_2^2)}$ e si scriva l'equazione (2.15) per la variabile residua q_2 .

Il sistema è risolubile per quadrature (la soluzione finale è cioè esprimibile a meno di un'integrazione)?

2.3 Riduzione del problema dei due corpi

2.3.1 Riduzione al moto di un corpo.

Il sistema che vogliamo studiare è costituito da due particelle che esercitano l'una sull'altra una forza diretta come la congiungente. Una volta fissato un sistema di riferimento inerziale, scegliamo le opportune variabili lagrangiane:



dalla figura, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x} + \mathbf{x}_1$, per cui:
 $m_2\mathbf{x}_2 = m_2\mathbf{x} + m_2\mathbf{x}_1$; inoltre, essendo
 $(m_1 + m_2)\mathbf{x}_G = m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2$, e, indicando
con $\mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_G$ i vettori spostamento rispet-
to ad un osservatore che trasla con il baricentro,
si ha infine che:

$$(m_1 + m_2)\mathbf{x}_G - (m_1 + m_2)\mathbf{x}_1 = m_2\mathbf{x} \implies$$

$$\boxed{\mathbf{x}'_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{x}.$$

Applichiamo ora il teorema di König per ricavare l'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{x}}_G^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{x}}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{x}}_2'^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{x}}_G^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{x}}^2.$$

L'energia potenziale relativa al tipo di forza in esame è della forma $V = V(\|\mathbf{x}\|)$, per cui la lagrangiana è subito trovata:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{x}}_G^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{x}}^2 - V(\|\mathbf{x}\|).$$

Si noti che le coordinate del baricentro sono cicliche, da cui consegue che si conserva la quantità di moto totale del sistema (il sistema, d'altra parte, è isolato). Siccome in tal modo il termine $\dot{\mathbf{x}}_G^2$ è costante, possiamo ridurci allo studio della funzione di Lagrange

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - V(\|\mathbf{x}\|), \quad \text{essendo } m = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \text{ la cosiddetta massa ridotta.} \quad (2.18)$$

Formalmente la (2.18) è la stessa funzione di Lagrange che descrive un punto materiale di massa m soggetto a una forza centrale. Conviene allora usare coordinate polari e studiare la funzione di Lagrange³

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) - V(\rho) \quad (2.19)$$

2.3.2 Riduzione alle quadrature mediante le costanti del moto.

Essendo θ una variabile ciclica per la lagrangiana (2.19), la costante del moto coniugata sarà $\alpha = m\rho^2\dot{\theta}$ che è proprio il modulo L del momento della quantità di moto. Inversamente, $\dot{\theta} = \frac{L}{m\rho^2}$;

dunque, la funzione di Routh per il sistema è data da $R = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 - \frac{L^2}{2m\rho^2} - V(\rho)$,

e dà luogo all'equazione (di Lagrange) del moto:

$$m\ddot{\rho} - \frac{L^2}{m\rho^3} + \frac{\partial V}{\partial \rho} = 0; \quad (2.20)$$

una volta integrata quest'ultima, è possibile anche esprimere la legge temporale per θ tramite

$$\theta - \theta_0 = \frac{L}{m} \int \frac{dt}{\rho}.$$

Inoltre, l'energia lagrangiana relativa a R

$$E_R = \frac{m\dot{\rho}^2}{2} + \frac{L^2}{2m\rho^2} + V$$

è evidentemente costante lungo le soluzioni della (2.20):

$$\frac{dE_R}{dt} = m\dot{\rho}\ddot{\rho} - \frac{L^2}{m\rho^3}\dot{\rho} + \frac{\partial V}{\partial \rho}\dot{\rho} = 0.$$

Dunque, seguendo il procedimento standard per sistemi a un grado di libertà, per i quali sussista l'integrale di Jacobi,

$$\frac{d\rho}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E_R - V - \frac{L^2}{2m\rho^2} \right)} \implies t = \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho \left[\frac{2}{m} \left(E_R - V - \frac{L^2}{2m\rho^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.21)$$

Il sistema è ridotto alle quadrature; le costanti di integrazione sono E, L, ρ_0, θ_0 .

2.3.3 Equazione differenziale per l'orbita.

Tenendo conto che $\dot{\theta} = \frac{L}{m\rho^2}$ e introducendo $u = \frac{1}{\rho}$ si ha che: $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\theta} \frac{L}{m\rho^2} = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta} \implies$

$$\ddot{\rho} = -\frac{L^2}{m^2} u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}.$$

Confrontando quest'ultima con la (2.20), e tenendo conto che $\frac{\partial V}{\partial \rho} = -u^2 \frac{\partial V}{\partial u}$, si ha infine che:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u + \frac{m}{L^2} \frac{dV}{du} = 0;$$

³usiamo fino a questo punto sempre lo stesso simbolo \mathcal{L} , per riservare poi un simbolo diverso solo alla funzione di Routh.

la soluzione di quest'equazione differenziale del second' ordine, $u = u(\theta)$, rappresenta proprio l'equazione dell'orbita. D'altra parte, tenendo conto della (2.21) e del fatto che $dt = \frac{m\rho^2}{L}d\theta$, non occorre risolvere direttamente l'equazione differenziale; si ha infatti che

$$\theta = \theta_0 + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{Ld\rho}{m\rho^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left(E_R - V - \frac{L^2}{2m\rho^2} \right)}}. \quad (2.22)$$

Per trovare una primitiva, bisogna esprimere la forma del potenziale. Ci occuperemo qui di potenziali dipendenti da potenze intere della distanza ρ :

$$V = a\rho^{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

che corrispondono ad una classe di forze fisicamente significative. La (2.22) diventa in tal caso

$$\theta = \theta_0 + \int_{u_0}^u du \left(\frac{2mE}{L^2} - \frac{2ma}{L^2} u^{-k-1} - u^2 \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.23)$$

Escludiamo $k = -1$ che darebbe $V = a$ e richiediamo che gli integrali appartengano a due classi standard:

1. integrali risolubili mediante funzioni circolari: $\int \frac{du}{\sqrt{\alpha u^2 + \beta u + \gamma}}$. Si ricade in questo caso quando, evidentemente,

$$\boxed{k = -3, -2, 1.}$$

2. integrali ellittici: in particolare, del tipo $\int \frac{du}{\alpha u^4 + \beta u^3 + \gamma u^2 + \delta u + \eta}$. Anche qui, con qualche conto, si arriva a determinare il range per k :

$$\boxed{k = -7, -5, -4, 0, 3, 5.}$$

Tra tutte le possibili scelte di questi esponenti, due sono di rilievo in relazione al teorema di Bertrand, che cerca le condizioni sotto le quali il moto avvenga su un'orbita chiusa, e afferma che *le sole forze centrali di interazione tra due particelle che danno luogo ad orbite chiuse sono quella che dipende dall'inverso del quadrato della distanza e quella che soddisfa la legge di Hooke*; per una dimostrazione, si veda il libro *Classical Mechanics* di H. Goldstein, pp. 90-94.

2.4 Riduzione del problema di Keplero

2.4.1 Orbita ed evoluzione temporale.

Il caso del problema di Keplero ci porta immediatamente a valutare la (2.23) per il caso $k = -2$:

$$\theta = \theta' - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{2mk}{L^2}u - u^2}} = \theta' - \arccos \frac{\frac{L^2u}{mk} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}}. \quad (2.24)$$

Di qui, si ottiene

$$\frac{1}{\rho} = \frac{mk}{L^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} \cos(\theta - \theta') \right); \quad (2.25)$$

la (2.25) deve ricordarci l'espressione delle coniche in coordinate polari

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\epsilon D} + \frac{\cos \theta}{D}, \quad (2.26)$$

ϵ essendo l'eccentricità, D la distanza dalla retta direttrice, e avendo posto $\theta' = 0$. Dunque, l'eccentricità è espressa tramite

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}},$$

e l'orbita, a secondo delle condizioni iniziali che fissano il valore dell'energia, sarà:

ENERGIA	ECCENTRICITÀ	CONICA
$E < 0$	$\epsilon < 1$	ellisse
$E = -\frac{mk^2}{2L^2}$	$\epsilon = 0$	circonferenza
$E = 0$	$\epsilon = 1$	parabola
$E > 0$	$\epsilon > 1$	iperbole

Esempio 2.5: si determini il periodo del moto se la conica è un'ellisse.

Si può facilmente mostrare che la (2.26), nel presente caso, assume la forma

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{a(1 - \epsilon^2)}(1 + \epsilon \cos \theta),$$

per cui, confrontando con (2.25), si ottiene $\epsilon = \sqrt{1 - \frac{L^2}{mka}} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$,

che mette in evidenza la dipendenza di a dal solo valore di E . Ricordando inoltre che tra i semiassi e l'eccentricità di un'ellisse vale la relazione generale $b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}$, abbiamo che l'area dell'ellisse vale

$$A = \pi ab = \pi \frac{a^2 L}{\sqrt{mka}};$$

sfruttando l'integrale primo del momento angolare, si ha $\dot{A} = \frac{L}{2m} \implies \frac{A}{\tau} = \frac{L}{2m}$,

dove τ è il tempo impiegato dal punto per tornare nella posizione iniziale. Si ha allora la relazione

$$\tau^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k} a^3$$

che costituisce la terza legge di Keplero. ⊙

2.4.2 Il vettore di Runge-Lenz.

Si è già notato che la funzione di Lagrange per il problema di Keplero

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{k}{x} \quad (\text{dove } x = \rho)$$

ha molteplici proprietà di simmetria: oltre all'indipendenza esplicita dal tempo, \mathcal{L} è invariante per rotazioni e per le trasformazioni infinitesime (non di punto)

$$\delta x_i = \epsilon m \left(\dot{x}_i x_k - \frac{1}{2} x_i \dot{x}_k - \frac{1}{2} x_j \dot{x}_j \delta_{ik} \right) \quad (i = \overline{1, 3}).$$

Siccome si ha, per quest'ultima variazione, che $\delta\mathcal{L} = \epsilon \frac{d}{dt} \left(\frac{x_k}{x} \right)$, il teorema di Noether permette di esprimere la costante del moto

$$A_k = m^2 \dot{x}_i (\dot{x}_i x_k - x_i \dot{x}_k) - mk \frac{x_k}{x} = \mathbf{p}^2 x_k - \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} p_k - mk \frac{x_k}{x}$$

che, in termini vettoriali, diventa

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{p}) - \frac{\mathbf{x}}{x}. \quad (2.27)$$

Il problema di Keplero ha dunque sette costanti del moto e tre gradi di libertà (pensando che la particella sia descritta da tre coordinate cartesiane): una in più di quelle previste dal teorema precedentemente dimostrato. In realtà E , \mathbf{L} e \mathbf{A} non sono tra di loro indipendenti. Infatti, essendo evidentemente $\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0$, questi due vettori devono restare ortogonali durante il moto; inoltre,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} \wedge \mathbf{L} - mkx = \mathbf{L} \cdot \mathbf{x} \wedge \mathbf{p} \implies Ax \cos \theta = L^2 - mkx,$$

da cui si può ricavare

$$\frac{1}{\rho} = \frac{mk}{L^2} \left(1 + \frac{A}{mk} \cos \theta \right). \quad (2.28)$$

Di nuovo abbiamo un'equazione dell'orbita in funzione delle costanti del moto: se confrontiamo questa espressione con la (2.25), otteniamo che, essendo $\theta' = 0$, \mathbf{A} forma un angolo θ con \mathbf{x} , dunque il vettore di Runge-Lenz è diretto come l'asse polare e, inoltre, è tale che

$$A = mk\epsilon \implies A^2 = m^2 k^2 + 2mEL^2,$$

che è una seconda relazione di dipendenza tra le costanti del moto. \mathbf{A} apporta dunque un'ulteriore costante del moto: fissa la direzione su cui giace il perielio (distanza minima del pianeta dal sole). \mathbf{A} è una funzione algebrica di \mathbf{x} e \mathbf{p} che permette un effettivo confinamento del moto.

Questa caratteristica dell'integrale di Runge-Lenz è, piuttosto, un'eccezione: oltre agli usuali integrali primi come l'energia, la quantità di moto e il momento angolare, può effettivamente succedere che un sistema possieda ulteriori costanti del moto, in quanto, come nel presente caso, la funzione di Lagrange ha numerose simmetrie. Ma non tutte le costanti del moto si comportano nello stesso modo: l'integrale dell'energia

$$E_{\mathcal{L}}(q, \dot{q}, t) = \text{cost.},$$

per es., confina il moto del punto rappresentativo ad una sottovarietà $(2n - 1)$ -dimensionale del fibrato tangente, in quanto, per ogni valore prescelto di $E_{\mathcal{L}}$, possiamo esprimere una variabile lagrangiana in termini delle rimanenti $(2n - 1)$; la conservazione del momento angolare, ancora, a sua volta consente di esprimere altre tre variabili in funzione delle rimanenti: il punto rappresentativo evolverà su una varietà a $(2n - 4)$ dimensioni, e così via, fino a che l'intersezione di tutte queste ipersuperfici avrà fissato una curva unidimensionale. In realtà, di norma, le cose vanno in modo diverso: vi sono funzioni che, pur essendo costanti durante il moto, non sono ad un sol valore, per cui dal punto di vista geometrico non definiscono una superficie della dimensionalità prevista o una curva chiusa. La loro intersezione con, per esempio, l'ipersuperficie dell'energia è ancora tutta quest'ultima. Vengono chiamati **integrali isolanti** quelle costanti del moto che "isolano" la traiettoria, nel senso che la confinano a sottovarietà del fibrato tangente; **integrali non isolanti** quelle funzioni a più valori che non riducono la dimensione dello spazio rappresentativo. Il problema di Keplero ha più integrali isolanti degli altri sistemi che interagiscono con forze centrali dipendenti da potenze dalla distanza, in quanto il vettore di Runge-Lenz è tipico proprio di tale problema: ciò è in accordo con il teorema di Bertrand, per il quale il moto kepleriano è *più confinato* degli altri, in quanto le sue orbite si chiudono, non ricoprono densamente regioni del piano.

3 AMPLIAMENTO ALLO SPAZIO DELLE FASI ED EQUAZIONI DI HAMILTON.

3.1 Le trasformazioni di Legendre

La forma delle equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad i = \overline{1, n}$$

suggerisce di scegliere, tra le infinite possibilità di lifting, quella per cui le nuove variabili indipendenti da aggiungere alle q_i sono le

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad i = \overline{1, n} \quad (3.1)$$

così da avere direttamente in forma normale le $2n$ equazioni del moto. Tale scelta, che di fatto sostituisce le variabili p alle variabili \dot{q} nel loro ruolo di nuove variabili aggiuntive, è una trasformazione di Legendre. Vediamone di seguito le caratteristiche generali. Consideriamo una funzione

$$F = F(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$$

e il cambiamento di variabili definito da

$$z_i = \frac{\partial F}{\partial y_i} \quad i = \overline{1, n}.$$

Queste equazioni, se invertibili, permettono la trasformazione $(x, y) \rightarrow (x, z)$, dove le x sono dette variabili passive mentre le y e le z variabili attive. L'invertibilità, com'è noto dal *teorema della funzione implicita*, richiede che la matrice jacobiana della trasformazione sia non singolare:

$$\det \left(\frac{\partial z_i}{\partial y_k} \right) = \det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k} \right) \neq 0.$$

La condizione assicura che le variabili z_i sono tutte indipendenti. Sia ora $G = G(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} y_i z_i - F$. Per una variazione infinitesima delle coordinate otteniamo

$$\delta G = \frac{\partial G}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial G}{\partial z_i} \delta z_i$$

e, dalla definizione,

$$\delta G = z_i \delta y_i + y_i \delta z_i - \frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i - \frac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i.$$

Dal confronto segue che

$$y_i = \frac{\partial G}{\partial z_i}; \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = -\frac{\partial G}{\partial x_i} \quad i = \overline{1, n}.$$

Schematizziamo la dualità della trasformazione:

	VECCHIO SISTEMA	NUOVO SISTEMA
VARIABILI	x, y	x, z
FUNZIONE	$F(x, y)$	$G(x, z)$
TRASFORMAZIONE	$z = \frac{\partial F}{\partial y}$ $G = yz - F$ $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial G}{\partial x}$	$y = \frac{\partial G}{\partial z}$ $F = zy - G$

Scegliamo dunque di rappresentare la dinamica su di uno spazio $2n$ dimensionale le cui coordinate sono, oltre alle q_i , i cosiddetti **momenti coniugati**

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad i = \overline{1, n} \quad (3.2)$$

Ripercorrendo lo schema delle trasformazioni di Legendre, \mathcal{L} definisce le nuove variabili attive p_i e definisce la nuova funzione

$$H \stackrel{\text{def}}{=} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \quad \text{detta **funzione di Hamilton**} \quad (3.3)$$

e, inoltre, le relazioni

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = \overline{1, n}); \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Lo spazio ampliato in cui le coordinate indipendenti sono le q e le p è detto **spazio delle fasi**.¹ Poiché

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \dot{p}_i \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

abbiamo infine le **equazioni di Hamilton**:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (3.4)$$

che sono in forma normale, essendo $H = H(q, p, t)$. Da notare che sono le seconde n equazioni ad esprimere una legge fisica (sono le equazioni di Lagrange trasformate), mentre le prime n esprimono le velocità generalizzate in funzione delle coordinate canoniche (sono le trasformazioni di Legendre inverse).

L'unica richiesta sul passaggio da una descrizione lagrangiana a una hamiltoniana è, ricordiamo,

$$\det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right) \neq 0,$$

la stessa che garantisce che le equazioni di Lagrange si possano porre in forma normale: se non è verificata, le accelerazioni \ddot{q}_i non sono tutte indipendenti tra di loro; dunque non è garantita l'unicità della soluzione e insorgono vincoli sul moto del punto rappresentativo sul fibrato tangente. Sul versante hamiltoniano la singolarità di tale jacobiano, analogamente, produce dipendenza tra i momenti coniugati.

Esempio 3.1: si scrivano le trasformazioni di Legendre per la lagrangiana $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1)^2$.

\mathcal{L} è degenere in quanto

$$\det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right) = \det \begin{pmatrix} q_2^2 & -q_1 q_2 \\ -q_1 q_2 & q_1^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Come da aspettarsi, i momenti coniugati

$$p_1 = q_2^2 \dot{q}_1 - q_1 q_2 \dot{q}_2 \quad \text{e} \quad p_2 = q_1^2 \dot{q}_2 - q_1 q_2 \dot{q}_1$$

¹L'analisi geometrico-differenziale mostra che i momenti coniugati sono i duali dei vettori tangenti (le \dot{q} in quel punto): lo spazio delle fasi, duale del fibrato tangente, è il **fibrato cotangente** allo spazio delle configurazioni. Convenzionalmente, indicheremo tale spazio duale a TQ con T^*Q .

non sono indipendenti. Infatti, sommando le due espressioni, dopo aver moltiplicato la prima per q_1 e la seconda per q_2 , si ha:

$$q_1 p_1 + q_2 p_2 = 0;$$

dunque non riusciamo ad esplicitare le velocità generalizzate in termini dei momenti (trasformazioni di Legendre inversa). Tutto quello che possiamo fare è valutare H secondo la definizione (3.3): notiamo che la lagrangiana è quadratica ed omogenea nelle \dot{q} , per cui $H = \mathcal{L}$; usando una delle equazioni per i momenti per sostituire, per esempio, \dot{q}_2 , si ha che $H = \frac{p_1^2}{2q_2^2}$.

Con questa hamiltoniana non possiamo ottenere $\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2}$.

In analogia con la terminologia usata nell'ambito lagrangiano, chiamiamo vincolo ogni relazione del tipo $\Phi(q, p) = 0$ che si presenta quando la lagrangiana non è regolare. Come nell'ambito lagrangiano, i vincoli serviranno a ridurre il numero di variabili indipendenti. Il moto si svolgerà quindi su un sottospazio dello spazio delle fasi, e non è detto che sia un moto hamiltoniano.

3.2 La funzione di Hamilton.

Limitiamoci al caso (fisicamente significativo) in cui si possa scrivere la funzione di Lagrange come

$$\mathcal{L} = T - V = a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + a_j \dot{q}_j + a - V(q, t).$$

In tal caso, essendo $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 2a_{ij} \dot{q}_j + a_i$,

$$p_i \dot{q}_i = 2a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + a_i \dot{q}_i = 2(T - a - a_i \dot{q}_i) + a_i \dot{q}_i \implies$$

$$H = p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = 2T - a_i \dot{q}_i - 2a - (T - V) = T + V - a_i \dot{q}_i - 2a.$$

Ricordando che

$$a = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}; \quad a_j = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j},$$

si ha

$$2a + a_j \dot{q}_j = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \implies \boxed{H = T + V - \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \cdot \dot{\mathbf{x}}_i.}$$

ricordando che la condizione $\partial \mathbf{x}_i / \partial t = 0$ implica che i vincoli sono fissi, vediamo che

- l'hamiltoniana coincide con l'energia meccanica del sistema ($T + V$) se e solo se i vincoli sono fissi;
- l'hamiltoniana può non dipendere esplicitamente dal tempo (essere quindi una costante del moto) anche non coincidendo con l'energia totale: quando le derivate parziali $\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}$ e $\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}$, pur non essendo nulle, non dipendono esplicitamente dal tempo.

3.3 Notazione simplettica.

In letteratura si usa una notazione compatta che permette di esprimere in forma vettoriale le equazioni di Hamilton e di sintetizzare alcuni aspetti notevoli del formalismo hamiltoniano.

Per un sistema a n gradi di libertà usiamo l'unica lettera z per specificare entrambe le variabili canoniche:

$$\begin{cases} z_i & = q_i \\ z_{i+n} & = p_i \end{cases} \quad (i = \overline{1, n})$$

e costruiamo le seguenti matrici colonna a $2n$ elementi:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \\ p_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \\ z_{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{2n} \end{pmatrix}; \quad \nabla H = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial z_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial H}{\partial z_n} \\ \frac{\partial H}{\partial z_{n+1}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial H}{\partial z_{2n}} \end{pmatrix}$$

Consideriamo inoltre il tensore doppio antisimmetrico ($2n \times 2n$)

$$\Gamma = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \hline -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array} \right)$$

Abbiamo allora che $\Gamma \nabla H =$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial z_{n+1}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial H}{\partial z_{2n}} \\ -\frac{\partial H}{\partial z_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ -\frac{\partial H}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

e le equazioni di Hamilton assumono una forma in un certo senso simmetrica:

$$\dot{\mathbf{z}} = \Gamma \frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}} \quad (3.5)$$

o, in componenti,

$$\dot{z}_i = \gamma_{ij} \frac{\partial H}{\partial z_j} \quad (i = \overline{1, 2n}) \quad \text{essendo } \Gamma = (\gamma_{ij}).$$

La (3.5) è detta forma simplettica (dal greco: *intrecciata*) delle equazioni di Hamilton.

Proprietà della matrice Γ .

- (a) ortogonalità : $\Gamma^T \Gamma = \mathbf{1}$
- (b) antisimmetria : $\Gamma^T + \Gamma = \mathbf{0}$
- (c) unimodularità : $\det \Gamma = 1$.

Inoltre, (a), (b) \implies (d) $\Gamma^T = -\Gamma = \Gamma^{-1}$ e (e) $\Gamma^2 = -\mathbf{1}$

3.4 Equazioni di Hamilton e principi variazionali.

Il principio di Hamilton è basato su un problema variazionale in cui le variabili (dipendenti dal tempo) sono proprio quelle lagrangiane, e le variabili ausiliarie sono le velocità generalizzate. Le variazioni sono pertanto effettuate sullo spazio delle configurazioni. Dalla validità di tale principio, come sappiamo, si deducono le equazioni di (Eulero-)Lagrange. Se ci limitiamo a sostituire, mediante le trasformazioni di Legendre, le p al posto delle \dot{q} , riscriviamo le equazioni di Eulero-Lagrange nella forma di equazioni di Hamilton. Infatti, tenendo conto delle relazioni

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{e} \quad \mathcal{L} = p_i \dot{q}_i - H(q, p, t), \quad (3.6)$$

che, come sappiamo, implicano le relazioni inverse

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = \overline{1, n}) \quad (3.7)$$

otteniamo direttamente che

$$0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} = \delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt,$$

ovvero

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] dt + p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (3.8)$$

A questo punto, mantenendo le ipotesi al contorno del principio di Hamilton

$$\delta q_i(t_1) = 0 = \delta q_i(t_2), \quad (3.9)$$

tenendo conto delle (3.7) e dell'indipendenza delle δq_i , si ha che

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = \overline{1, n}). \quad (3.10)$$

Per quel che riguarda le condizioni al contorno sulla corrispondente traiettoria nello spazio delle fasi, anche tenendo conto delle (3.9), in generale abbiamo che

$$\delta p_i = \frac{\partial p_i}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \delta q_k \neq 0 \quad (i = \overline{1, n}). \quad (3.11)$$

Viceversa, se si vuole che anche le (3.7) siano equazioni di Eulero-Lagrange, esse dovranno essere ricavate dalla condizione di stazionarietà. Ciò equivale a dire che se non sussistono più a priori relazioni tra q, \dot{q}, p , le p sono variabili indipendenti e il problema variazionale da trattare è del tipo¹

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} F(q, \dot{q}, p, \dot{p}, t) dt = 0. \quad (3.12)$$

¹il problema variazionale così posto non dipende nè dalla struttura di fibrato cotangente dello spazio delle fasi, nè dal suo essere diffeomorfo al fibrato tangente

Si ricavano nuovamente le (3.10), ma questa volta, a causa dell'indipendenza delle δq_i e delle δp_i , si ottengono proprio tutte le $2n$ equazioni di Hamilton.

Infatti, scrivendo direttamente le equazioni di Eulero-Lagrange per la stazionarietà di

$$\int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H) dt,$$

si ottiene

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (p_k \dot{q}_k - H) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial q_i} (p_k \dot{q}_k - H) \right) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{p}_i} (p_k \dot{q}_k - H) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial p_i} (p_k \dot{q}_k - H) \right) = 0 \end{cases} \quad (i = \overline{1, n})$$

e, notando che $\partial H / \partial \dot{q} = 0$ e $\partial H / \partial \dot{p} = 0$, si ha infine che:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \\ -\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \end{cases} \quad (i = \overline{1, n})$$

cioè le equazioni di Hamilton. È bene ribadire che il problema variazionale è stato posto nello spazio delle fasi e dunque si parla di equazioni di Eulero-Lagrange a patto che esso sia stato impostato in modo standard, vale a dire:

- le variabili indipendenti sono $2n$: le q_i e le p_i ;
- non si assumono le trasformazioni di Legendre (che dunque non valgono sulle traiettorie variate), ma casomai si ricavano;
- le variazioni avvengono a estremi fissi:

$$\delta q_i(t_1) = 0 = \delta q_i(t_2); \quad \delta p_i(t_1) = 0 = \delta p_i(t_2), \quad (3.13)$$

Siccome sotto queste condizioni si ricavano le equazioni (di Hamilton) del moto, possiamo formulare un principio variazionale per la Meccanica:

Principio modificato di Hamilton: sulla traiettoria del moto è stazionario il funzionale

$$\int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H) dt$$

rispetto ad arbitrarie variazioni a estremi fissi.

Si osservi che il termine *modificato* è dovuto al fatto che nella versione lagrangiana del principio di Hamilton le due configurazioni agli estremi selezionavano la curva critica; in ambito hamiltoniano fissare la condizione iniziale significa fissare tutte le costanti di integrazione, in quanto si fissano n valori di q e n valori di p , che per un sistema di $2n$ equazioni del primo ordine è quanto richiesto per trovare la soluzione. Quindi in questo caso il secondo estremo deve essere vincolato a stare sulla traiettoria del moto.

Si osservi inoltre che, a causa della particolare struttura dell'integrando, non sarebbe necessario imporre condizioni agli estremi sulle p_i , nel senso che l'integrazione per parti comporta solo contributi

agli estremi del tipo δq_i . Ma il problema variazionale richiede le (3.13) per ottenere equazioni di Eulero-Lagrange. Ci chiediamo casomai quali nuove conseguenze si ottengono da tutte queste modifiche.

Infatti, ricordando che le condizioni

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0 \quad \text{e} \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\mathcal{L} + \frac{d}{dt} F(q, t) \right) dt = 0$$

portano alle medesime equazioni di Lagrange, analogamente, se valgono le (3.13), le

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p\dot{q} - H) dt = 0 \quad \text{e} \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(p\dot{q} - H + \frac{d}{dt} F(q, p, t) \right) dt = 0$$

portano alle stesse equazioni di Hamilton.

Esercizio: si provi direttamente quest'ultima affermazione scrivendo le equazioni di Eulero-Lagrange per il secondo integrando.

Osservazione 1. A margine di quest'ultima discussione è interessante analizzare un semplice esempio: scegliamo, quale funzione arbitraria, $F = -q_i p_i$, e aggiungiamo la sua derivata temporale nell'integrale. Otteniamo:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[p_i \dot{q}_i - H - \frac{d}{dt} (p_i q_i) \right] dt = - \int_{t_1}^{t_2} (q_i \dot{p}_i + H) dt.$$

La condizione di stazionarietà di questo integrale porta ancora alle equazioni di Hamilton ma l'integrando, in quanto funzione delle \dot{p} , non può rappresentare la trasformazione di Legendre di una lagrangiana. L'assunzione di un principio *modificato* porta a sistemi hamiltoniani che, formalmente, non provengono da una pre-formulazione lagrangiana.

Osservazione 2. Ricordiamo che il principio di minima azione (vds. Goldstein Cap.7 § 5) è formulato interamente nello spazio delle configurazioni. Infatti, come si ricorderà, la generica trasformazione infinitesima del funzionale $\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$ è:

$$\Delta \Phi = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i + \mathcal{L} \Delta t \right]_{t_1}^{t_2}. \quad (3.14)$$

Il punto rappresentativo che si muove sulla curva variata dalla variazione Δ , ricordiamo, parte e arriva ad istanti di tempo pure essi variati $t_1 + \Delta t_1$ e $t_2 + \Delta t_2$. La variazione complessiva all'istante iniziale sarà, dunque,

$$\Delta q_i(t_1) = q'_i(t_1 + \Delta t_1) - q_i(t_1),$$

per cui, sviluppando in serie al prim'ordine di approssimazione,

$$\Delta q_i(t_1) = q'_i(t_1) + \dot{q}_i(t_1) \Delta t_1 - q_i(t_1) = \delta q_i(t_1) + \dot{q}_i \Delta t_1.$$

Sostituendo quest'espressione insieme a quella analoga per $\Delta q_i(t_2)$ nella (3.14), si ha che sulla curva del moto reale, dove valgono le equazioni di Lagrange,

$$\Delta \Phi = \Delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = [p_i \Delta q_i - p_i \dot{q}_i \Delta t + \mathcal{L} \Delta t]_{t_1}^{t_2} = [p_i \Delta q_i - H \Delta t]_{t_1}^{t_2}.$$

Se si fanno ora le ipotesi di variazione particolare:

- H è costante durante il moto reale e lungo tutte le curve variate, e dunque

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} H dt = \int_{t_1}^{t_2} [H(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - H(q, \dot{q}, t)] dt + \int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_2 + \Delta t_2} H dt = [H \Delta t]_{t_1}^{t_2},$$

essendo nullo il primo integrale;

- $\Delta q_i(t_1) = 0 = \Delta q_i(t_2)$,

segue che

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \Delta \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt - [H \Delta t]_{t_1}^{t_2}.$$

Confrontando con il risultato precedente, segue la condizione di stazionarietà

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt = 0,$$

che costituisce il **principio di minima azione**.

L'annullarsi delle variazioni Δq_i agli estremi, significa che la curva reale e quella variata coincidono, sullo spazio delle configurazioni, in un punto: se, per fissare le idee, ci riferiamo all'estremo d'integrazione t_1 , si richiede che il punto individuato da t_1 sulla curva reale coincida con quello corrispondente all'istante $t_1 + \Delta t_1$ sulla curva variata.

Si noti che un moto variato può svolgersi sulla stessa curva del moto reale, ma con velocità diversa (si ricordi la distinzione tra orbita e traiettoria!). Siccome i due moti sono descritti dalla stessa hamiltoniana, per essere distinguibili tra di loro, dovranno partire e concludere il moto a tempi diversi: questo è il motivo per cui $\Delta t_i \neq 0$.

4 IL FORMALISMO HAMILTONIANO.

4.1 Parentesi di Poisson e di Lagrange.

La derivata totale rispetto al tempo di una generica funzione $F = F(z, t)$ è data da

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial z_i} \dot{z}_i + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial z_i} \gamma_{ij} \frac{\partial H}{\partial z_j} + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (4.1)$$

dove si è fatto uso delle equazioni di Hamilton in forma simplettica

$$\dot{z}_i = \gamma_{ij} \frac{\partial H}{\partial z_j} \quad (i = \overline{1, 2n}). \quad (4.2)$$

La (4.1) assume una forma caratteristica del formalismo hamiltoniano se si definisce *parentesi di Poisson* tra due funzioni F e G l'espressione

$$[F, G] := \frac{\partial F}{\partial z_i} \gamma_{ij} \frac{\partial G}{\partial z_j}. \quad (4.3)$$

Allora, la (4.1) diviene

$$\frac{dF}{dt} = [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (4.4)$$

Definiamo inoltre una sorta di inverso delle parentesi di Poisson. Siano infatti

$$A_i = A_i(z) \quad (4.5)$$

$2n$ funzioni indipendenti definite sullo spazio delle fasi e supponiamo che le z_i siano esprimibili come funzioni delle A_i ; definiamo *parentesi di Lagrange* tra due di tali funzioni A_i e A_j la funzione:

$$\{A_i, A_j\} := \frac{\partial z_k}{\partial A_i} \gamma_{kl} \frac{\partial z_l}{\partial A_j}; \quad (4.6)$$

si dimostra senza difficoltà (vedi Appendice A) che

$$\{A_i, A_j\}[A_j, A_k] = -\delta_{ik}. \quad (4.7)$$

Le principali proprietà algebriche delle parentesi di Poisson sono, \forall funzione E, F, G :

$$\boxed{\text{antisimmetria}} : [F, G] = -[G, F] \quad (4.8a)$$

$$\boxed{\text{linearità}} : [\lambda E + \mu F, G] = \lambda[E, G] + \mu[F, G] \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (4.8b)$$

$$\boxed{\text{identità di Jacobi}} : [E, [F, G]] + [F, [G, E]] + [G, [E, F]] = 0 \quad (4.8c)$$

Lo spazio vettoriale lineare reale delle funzioni definite sullo spazio delle fasi, assieme alle parentesi di Poisson $[,]$ definite come in (4.3) e soddisfacenti (4.8), costituiscono un rilevante esempio di un'algebra non associativa, nota come **algebra di Lie**. Le (4.8a,b) seguono immediatamente dalla definizione di parentesi di Poisson. La (4.8c) è dimostrata in Appendice B.

Altre proprietà:

◆ **regola del prodotto:** $[E, FG] = F[E, G] + [E, F]G$

◆ $[F, F] = 0$

◆ $[\lambda, F] = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (λ è un *elemento neutro*)

◆ **chain rule:** per una trasformazione di coordinate $z \rightarrow Z(z, t)$, la parentesi di Poisson si trasforma come

$$[F, G] = \frac{\partial F'}{\partial Z_i} [Z_i, Z_j] \frac{\partial G'}{\partial Z_j} \quad (\text{dove } F'(Z, t) = F(z, t) \text{ e } G'(Z, t) = G(z, t)).$$

Per provare quest'ultima proprietà basta notare che:

$$[F, G] = \frac{\partial F}{\partial z_i} \gamma_{ij} \frac{\partial G}{\partial z_j} = \frac{\partial F'}{\partial Z_k} \frac{\partial Z_k}{\partial z_i} \gamma_{ij} \frac{\partial Z_l}{\partial z_j} \frac{\partial G'}{\partial Z_l} \quad \text{e che} \quad \frac{\partial Z_k}{\partial z_i} \gamma_{ij} \frac{\partial Z_l}{\partial z_j} = [Z_k, Z_l].$$

Casi particolari:

Se nella (4.3)

$$F = z_i, \quad G = z_j \implies [z_i, z_j] = \gamma_{ij} \quad (4.9)$$

$$F = z_i, \quad G = H \implies [z_i, H] = \dot{z}_i \quad (4.10)$$

Inoltre, se nella (4.6) si pone $A_i = z_i$ e $A_j = z_j$, si ha

$$\{z_i, z_j\} = \gamma_{ij}. \quad (4.11)$$

La (4.10) esprime le equazioni di Hamilton nella notazione delle parentesi di Poisson. Le (4.9) e (4.11) sono dette, rispettivamente, parentesi fondamentali di Poisson e di Lagrange. Infine, ricordando la (4.4), diremo che una funzione F è una costante del moto se e solo se

$$[F, H] + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Nota sull'algebra di Lie.

Per meglio chiarire il termine *algebra non associativa*, osserviamo che:

- (a) il prodotto esterno di due vettori: $\vec{A} \wedge \vec{B}$
- (b) la parentesi di Poisson di due campi scalari: $[A, B]_P$
- (c) il commutatore di due operatori: $[A, B]_- = AB - BA$

soddisfano le medesime condizioni (4.8) che caratterizzano un'algebra di Lie. Più schematicamente, introduciamo per tutte e tre le operazioni un comune simbolo di *prodotto* $*$ e scriviamo in tutti e tre i casi $A * B$; valgono allora le seguenti proprietà:

$$\left\{ \begin{array}{l} A * B + B * A = 0 \\ A * A = 0 \\ A * (B + C) = A * B + A * C \\ (A * B) * C + (B * C) * A + (C * A) * B = 0. \end{array} \right.$$

Quest'ultima, l'identità di Jacobi, prende il posto della legge associativa che, evidentemente non è soddisfatta:

$$(A * B) * C \neq A * (B * C).$$

Osservazione: Dirac, agli albori della Meccanica Quantistica, introdusse la corrispondenza

$$[A, B]_P \longrightarrow \frac{1}{i\hbar}[A, B]_-$$

tra parentesi di Poisson di funzioni *classiche* e commutatori di operatori quantistici. Vale la pena sottolineare che, al di là delle ragioni fisiche su cui si basa tale corrispondenza, dal punto di vista matematico essa è possibile solo in quanto entrambe le operazioni sono un *prodotto* con le proprietà specifiche di un'algebra di Lie.

4.2 Il teorema della parentesi di Poisson.

Dalla (4.2) vediamo che a ogni assegnata hamiltoniana $H(z, t)$ è possibile associare $2n$ equazioni differenziali ordinarie del primo ordine; queste, una volta integrate, forniscono un insieme di moti $z_i = z_i(z_0, t)$. Nell'ottica del *problema inverso*, già esposto in ambito lagrangiano, chiediamoci viceversa sotto quali condizioni un moto generico sullo spazio delle fasi è generato da una funzione di Hamilton.

Più esplicitamente: siano assegnate $2n$ funzioni sufficientemente regolari $\psi_i(z, t)$ ed il sistema differenziale

$$\dot{z}_i = \psi_i(z, t) \quad (i = \overline{1, 2n}) \quad (4.12)$$

di cui le funzioni

$$z_i = f_i(z_0, t) \quad (i = \overline{1, 2n}) \quad (4.13)$$

rappresentino la soluzione.

Il moto è hamiltoniano se, evidentemente, esiste una funzione $H(z, t)$ tale che

$$\psi_i(z, t) = \gamma_{ij} \frac{\partial H}{\partial z_j} \quad (i = \overline{1, 2n.}) \quad (4.14)$$

Il seguente teorema fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché esista (almeno) una soluzione della (4.14):

Teorema (della parentesi di Poisson): *supponiamo che $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ rappresenti l'evoluzione temporale di un sistema rappresentato nello spazio delle fasi. Tale evoluzione è generata da un'hamiltoniana se e solo se, per ogni coppia di funzioni $F(\mathbf{z}, t)$ e $G(\mathbf{z}, t)$, la derivata temporale soddisfa la relazione:*

$$\frac{d}{dt}[F, G] = [\dot{F}, G] + [F, \dot{G}]. \quad (4.15)$$

Dimostrazione:

(a) Necessità.

Siccome il moto è, per ipotesi, generato da un'hamiltoniana, dalla (4.4) si ha che

$$\frac{d}{dt}[F, G] = [[F, G], H] + \frac{\partial}{\partial t}[F, G]. \quad (4.16)$$

D'altra parte, tenendo conto che

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}[F, G] &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial z_i} \gamma_{ij} \frac{\partial G}{\partial z_j} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right) \gamma_{ij} \frac{\partial G}{\partial z_j} + \frac{\partial F}{\partial z_i} \gamma_{ij} \frac{\partial}{\partial z_j} \left(\frac{\partial G}{\partial t} \right) = \left[\frac{\partial F}{\partial t}, G \right] + \left[F, \frac{\partial G}{\partial t} \right], \end{aligned}$$

sfruttando la linearità delle parentesi di Poisson e l'identità di Jacobi $[[F, G], H] = [[F, H], G] + [F, [G, H]]$, si ha infine che la (4.16) diventa:

$$\frac{d}{dt}[F, G] = \left[[F, H] + \frac{\partial F}{\partial t}, G \right] + \left[F, [G, H] + \frac{\partial G}{\partial t} \right] = \left[\frac{dF}{dt}, G \right] + \left[F, \frac{dG}{dt} \right].$$

□

(b) Sufficienza.

Poniamo la (4.14) in forma normale:

$$\frac{\partial H}{\partial z_i} = \gamma_{ji} \dot{z}_j = \gamma_{ji} \psi_j \quad (i = \overline{1, 2n}). \quad (4.17)$$

Come è noto, condizione necessaria di integrabilità della (4.17)¹ è che

$$\frac{\partial}{\partial z_k} (\gamma_{ji} \dot{z}_j) = \frac{\partial}{\partial z_i} (\gamma_{jk} \dot{z}_j);$$

tale condizione è anche sufficiente se il dominio di definizione di H è uno stellato (o anche solo semplicemente connesso); sotto tale ipotesi, e scegliendo

$$F = z_i; \quad G = z_j,$$

la (4.15) diviene

$$\frac{d}{dt}[z_i, z_j] = \frac{d}{dt} \gamma_{ij} = 0 = [\dot{z}_i, z_j] + [z_i, \dot{z}_j] = \frac{\partial \psi_i}{\partial z_k} \gamma_{kl} \frac{\partial z_j}{\partial z_l} + \frac{\partial z_i}{\partial z_k} \gamma_{kl} \frac{\partial \psi_j}{\partial z_l}$$

¹nella (4.17) l'incognita è H : formalmente è la stessa situazione che si incontra parlando di forze conservative, dove $F_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}$ è un'equazione per U e la condizione necessaria per la sua esistenza è $\frac{\partial F_i}{\partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_i}$; il lavoro elementare è in tal caso una forma chiusa e, se la condizione è anche sufficiente, è una forma esatta.

$$\implies \frac{\partial \psi_i}{\partial z_k} \gamma_{kj} + \frac{\partial \psi_j}{\partial z_l} \gamma_{il} = 0;$$

moltiplicando quest'ultima uguaglianza per $\gamma_{im}\gamma_{jn}$ e sommando sugli indici ripetuti, si ha:

$$-\frac{\partial \psi_i}{\partial z_k} \delta_{kn} \gamma_{im} + \frac{\partial \psi_j}{\partial z_l} \delta_{lm} \gamma_{jn} = 0 \implies \frac{\partial \psi_i}{\partial z_k} \gamma_{il} = \frac{\partial \psi_j}{\partial z_l} \gamma_{jk} \implies \frac{\partial}{\partial z_k} (\psi_i \gamma_{il}) = \frac{\partial}{\partial z_l} (\psi_j \gamma_{jk}). \quad \square$$

Osservazione: il fibrato cotangente non ha sempre le proprietà di uno stellato. Il risultato ottenuto dal teorema ha allora un valore locale: ciò significa che, quando le condizioni del teorema sono soddisfatte, esistono degli aperti dello spazio delle fasi in cui è possibile definire una funzione di Hamilton locale; non esiste necessariamente un'unica hamiltoniana definita sull'intero spazio.

Esempio 4.1: si verifichi se il sistema dinamico di rango due:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1 z_2 \\ \dot{z}_2 = -z_1 z_2 \end{cases}$$

è un sistema hamiltoniano.

Se il moto risultante fosse hamiltoniano, esisterebbe una funzione H tale da soddisfare

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial z_1} = z_1 z_2 \\ \frac{\partial H}{\partial z_2} = z_1 z_2 \end{cases}$$

ma questo sistema non è integrabile, in quanto $\frac{\partial^2 H}{\partial z_1 \partial z_2} \neq \frac{\partial^2 H}{\partial z_2 \partial z_1}$.

Verifichiamo che anche il teorema precedente porta alla medesima conclusione. Scegliamo $F = z_1$ e $G = z_2$. Siccome $[z_1, z_2] = 1$,

$$\frac{d}{dt} [z_1, z_2] = 0 = [\dot{z}_1, z_2] + [z_1, \dot{z}_2] = [z_1 z_2, z_2] - [z_1, z_1 z_2] = [z_1, z_2] z_2 - [z_1, z_2] z_1 = z_2 - z_1 \neq 0.$$

⊗

Corollario (Teorema di Poisson): se F e G sono costanti durante il moto generato da una data hamiltoniana, anche $[F, G]$ è una costante del moto.

Infatti, dalla (4.15),

$$\dot{F} = 0 \text{ e } \dot{G} = 0 \implies \frac{d}{dt} [F, G] = 0.$$

□

Esempio 4.2. Conservazione del momento angolare per una particella di massa unitaria soggetta a forze centrali.

Poiché l'hamiltoniana ed il momento angolare sono, rispettivamente, $H = 1/2 (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + V(\rho)$ e $\mathbf{L} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{p} = (x_2 p_3 - x_3 p_2) \mathbf{e}_1 + (x_3 p_1 - x_1 p_3) \mathbf{e}_2 + (x_1 p_2 - x_2 p_1) \mathbf{e}_3$, si ha che

$$[H, L_1] = -\frac{\partial V}{\partial x_2} x_3 + \frac{\partial V}{\partial x_3} x_2 = \frac{\partial V}{\partial \rho} \left(-\frac{\partial \rho}{\partial x_2} x_3 + \frac{\partial \rho}{\partial x_3} x_2 \right) = \frac{\partial V}{\partial \rho} \left(-\frac{x_2 x_3}{\rho} + \frac{x_3 x_2}{\rho} \right) = 0.$$

Analogamente $[L_2, H] = \frac{\partial V}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_3} x_1 - \frac{\partial \rho}{\partial x_1} x_3 \right) = 0.$

Poiché $[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k$, il teorema di Poisson stabilisce che anche $L_3 = [L_1, L_2]$ è una costante del moto: per avere la conservazione del vettore momento angolare è dunque sufficiente che siano costanti

del moto due sue componenti cartesiane. ⊗

Osservazione. Si noti che malgrado le tre componenti cartesiane di \mathbf{L} siano variabili indipendenti, esse non possono essere prescelte contemporaneamente come variabili canoniche, in quanto non soddisferebbero le (4.11) (parentesi fondamentali di Poisson): $[L_i, L_j] \neq \gamma_{ij}$.

4.3 Dalle trasformazioni di punto alle trasformazioni canoniche.

Come abbiamo visto, se richiediamo che le equazioni di Hamilton siano equazioni di Eulero-Lagrange, le cui curve critiche giacciono sullo spazio delle fasi, non introduciamo alcuna nuova informazione *fisica*: infatti, tali curve, così come le soluzioni che giacciono sul fibrato tangente per le equazioni di Lagrange, si proiettano su un'unica curva

$$q_i = q_i(q_0, t)$$

dello spazio delle configurazioni. Comunque, l'ampliamento del principio richiede implicitamente che le variazioni δz_i siano nulle agli estremi dell'intervallo di integrazione e tale scelta non è priva di conseguenze, le quali dipendono tutte dalla proprietà:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = \left[\frac{\partial F}{\partial z_i} \delta z_i \right]_{t_1}^{t_2} = 0 \quad \forall F(z, t),$$

e, in sintesi, consistono in:

- (i) le descrizioni lagrangiana e hamiltoniana non sono più necessariamente equivalenti;
- (ii) se aggiungiamo nel funzionale del nostro problema variazionale derivate totali rispetto al tempo di funzioni arbitrarie delle z e di t , le equazioni di Eulero-Lagrange mantengono, anche per tale funzionale, una forma hamiltoniana.

La teoria delle trasformazioni in ambito hamiltoniano mostrerà (vds. Appendice E) che le trasformazioni di punto sono un sottogruppo delle più generali trasformazioni che conservano la forma hamiltoniana delle equazioni del moto: le trasformazioni canoniche. Detto altrimenti, il gruppo di covarianza delle equazioni di Hamilton è più esteso di quello delle equazioni di Lagrange. Di conseguenza, nell'ambito hamiltoniano vi è maggior libertà di trasformare le coordinate che descrivono il sistema e, dunque, maggiore possibilità di trovare descrizioni all'interno delle quali il problema differenziale sia risolvibile o, almeno, semplificabile.¹

Dal punto di vista geometrico, la maggior generalità delle trasformazioni canoniche può essere così espressa: nella visione *attiva* le trasformazioni di punto agiscono in modo tale che le nuove velocità generalizzate \dot{Q}_i sono le coordinate dello spazio tangente (fibra) allo spazio delle configurazioni nel punto che ora viene descritto dalle nuove coordinate Q_i .

Al contrario, le trasformazioni canoniche possono *mescolare* tra loro le coordinate ed i momenti, nel senso che equazioni di trasformazione del tipo $Q_i = Q_i(q, p, t)$ non forniscono un nuovo sistema di coordinate per lo spazio delle configurazioni, ma n delle $2n$ coordinate dello spazio delle fasi. Basti pensare alla trasformazione canonica (non di punto!)

$$Q_i = p_i; \quad P_i = -q_i \quad (i = \overline{1, n})$$

che scambia tra loro i ruoli di coordinate e momenti.

La proprietà di una trasformazione di essere canonica non riguarda un particolare problema hamiltoniano ma, piuttosto, caratteristiche geometriche dello spazio delle fasi: una trasformazione è canonica se

¹In realtà questa superiorità del formalismo canonico è solo teorica; l'unico campo di applicazione in cui tale specificità appare particolarmente efficace è quello della moderna teoria delle perturbazioni.

trasforma ogni sistema di equazioni canoniche in un sistema di equazioni canoniche. Vediamo di chiarire meglio con qualche esempio.

Esempio 4.3: si studi la trasformazione

$$\begin{cases} Q = \frac{qp}{2} \\ P = \ln \frac{p}{2q} \end{cases} \quad \text{e la sua inversa} \quad \begin{cases} q = \sqrt{Qe^{-P}} \\ p = 2\sqrt{Qe^P}. \end{cases}$$

Supponiamo che per le vecchie coordinate valgano le equazioni di Hamilton

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

per una generica $H(q, p, t) = H'(Q, P, t)$. Trasformiamo tali equazioni derivando rispetto al tempo entrambi i membri delle equazioni di trasformazione:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\sqrt{Qe^{-P}}}{2Q}(\dot{Q} - Q\dot{P}) = \frac{\partial H'}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial H'}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p} = \frac{\partial H'}{\partial Q} \frac{\sqrt{Qe^{-P}}}{2} + \frac{\partial H'}{\partial P} \frac{1}{2\sqrt{Qe^P}} \\ \dot{p} &= \frac{\sqrt{Qe^P}}{Q}(\dot{Q} + Q\dot{P}) = -\frac{\partial H'}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial H'}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q} = -\frac{\partial H'}{\partial Q} \sqrt{Qe^P} + \frac{\partial H'}{\partial P} \frac{1}{\sqrt{Qe^{-P}}}, \end{aligned}$$

vale a dire:

$$\begin{cases} Q \frac{\partial H'}{\partial Q} + \frac{\partial H'}{\partial P} = \dot{Q} - Q\dot{P} \\ -Q \frac{\partial H'}{\partial Q} + \frac{\partial H'}{\partial P} = \dot{Q} + Q\dot{P} \end{cases}$$

da cui si vede che anche le nuove equazioni differenziali sono canoniche (con hamiltoniana H'). Questo risultato è indipendente dall'hamiltoniana di partenza che, infatti, è rimasta arbitraria durante tutti i passaggi. \odot

Esempio 4.4: si applichi la trasformazione dell'esempio precedente all'integrando del funzionale del principio di Hamilton e se ne valuti l'effetto.

Essendo

$$p\dot{q} - H = 2\sqrt{Qe^P} \left(\frac{\dot{Q}e^{-P}}{2\sqrt{Qe^{-P}}} - \frac{Q\dot{P}e^{-P}}{2\sqrt{Qe^{-P}}} \right) - H' = \dot{Q} - Q\dot{P} - H' = \dot{Q}P - H' + \frac{d}{dt}(Q - QP),$$

è chiaro che la modificazione dell'integrando non dipende dalla particolare hamiltoniana, ma dalla trasformazione di coordinate, ed è dato dalla derivata temporale di $F(Q, P) = Q - QP$. \odot

Dunque, ogni trasformazione canonica produce una ben definita modificazione $\frac{dF}{dt}$. Viceversa, la teoria delle trasformazioni canoniche (vds. Goldstein, Cap. 9), impone le condizioni a cui F deve soddisfare, affinché le equazioni di trasformazione siano canoniche. F è allora detta funzione generatrice ed è conveniente considerarla come funzione di n delle vecchie variabili e n delle nuove. Nel precedente esempio, potremmo porre allora, nelle notazioni del testo richiamato,

$$F_1(q, Q) = Q \left(1 - \ln \frac{Q}{q^2} \right).$$

Osservazione. La relazione tra gli integrandi del principio di Hamilton è, in forma differenziale

$$p_i dq_i = P_i dQ_i + dF_1$$

nel caso piú semplice (dove non si devono esprimere dq_i e/o dQ_i tramite differenziali di altre variabili indipendenti). La richiesta di canonicità è dunque quella di esattezza della forma differenziale

$$pdq - PdQ.$$

Esempio 4.5: *Una trasformazione che lascia invariate in forma le equazioni di Hamilton, necessariamente modifica il funzionale del problema variazionale?*

Si potrebbe arguire: se una funzione generatrice è costante del moto, il funzionale non varia numericamente. Ma ciò è erroneo.¹ Un contro-esempio funzionante è invece quello della trasformazione identità (da verificare per esercizio). È interessante inoltre analizzare il caso delle trasformazioni di punto. Queste, lasciando invariate le equazioni di Lagrange, conseguentemente lasciano invariate le equazioni di Hamilton. Dunque, a ragion veduta, assumiamo a priori la loro canonicità e, in base alle loro proprietà, scriviamo

$$P_i \dot{Q}_i - K(Q, P) = p_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial t} \right) - K;$$

d'altra parte, essendo $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}'(Q, \dot{Q}, t)$, ne consegue che

$$P_i \dot{Q}_i - K(Q, P) = p_i \dot{q}_i + \frac{\partial P_i Q_i}{\partial t} - K = p_i \dot{q}_i - H.$$

Si noti come nei calcoli si sia delineato il ruolo di variabili indipendenti per le q_i e le P_i . Quindi l'ipotesi di canonicità comporta

$$K = H + \frac{\partial P_i Q_i}{\partial t}.$$

D'altra parte, (vds. Goldstein) se vogliamo passare a uno schema in cui le variabili indipendenti sono le q e le Q , possiamo dedurre, tramite una trasformazione di Legendre, che

$$F_1(q, Q) = F_2(q, P) - QP = 0;$$

dunque resta verificato che $\frac{dF_1}{dt} = 0$ per tutte le dinamiche.

Esercizio: *Si mostri che la forma differenziale $p_i dq_i$ è invariante per trasformazioni di punto.*

4.4 La condizione simplettica.

Affrontiamo ora un'ulteriore caratterizzazione delle trasformazioni canoniche che non deriva dal principio di Hamilton (come quella imperniata sulle funzioni generatrici), ma, direttamente, dalla struttura formale delle equazioni di Hamilton.

In tutta la trattazione che seguirà, faremo l'ipotesi che le equazioni di trasformazione

$$Z_i = Z_i(z) \quad (i = \overline{1, 2n})$$

siano indipendenti dal tempo.¹ Come è ovvio, assumiamo che il moto descritto dalle variabili z sia canonico, vale a dire $\dot{z}_k = \gamma_{kj} \frac{\partial H}{\partial z_j}$, e indichiamo con \mathbf{J} la matrice jacobiana di componenti $(j_{ik}) =$

$\left(\frac{\partial Z_i}{\partial z_k} \right)$; conseguentemente,

$$\dot{Z}_i = \frac{\partial Z_i}{\partial z_k} \dot{z}_k = \frac{\partial Z_i}{\partial z_k} \gamma_{kj} \frac{\partial H}{\partial z_j} \quad (4.18)$$

¹Si noti che $\frac{dF}{dt} = 0 = [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t}$ vale per un particolare moto, quello generato dalla particolare hamiltoniana H .

¹Questa ipotesi è scelta per semplicità di calcolo: è possibile mostrare con calcoli piuttosto laboriosi che tutti i risultati che otterremo restano validi anche per trasformazioni che dipendono esplicitamente dal tempo (vds. Appendice H).

o, in termini vettoriali, $\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{J}\mathbf{\Gamma} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{z}}$.

D'altra parte,
$$\frac{\partial H}{\partial z_i} = \frac{\partial H'}{\partial Z_j} \frac{\partial Z_j}{\partial z_i} \implies \frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{J}^T \frac{\partial H'}{\partial \mathbf{Z}}. \quad (4.19)$$

Combinando le (4.18) e (4.19), si ha $\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{J}\mathbf{\Gamma} \mathbf{J}^T \frac{\partial H'}{\partial \mathbf{Z}}$.

Quindi la trasformazione $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{Z}$ è canonica se e solo se

$$\mathbf{J}\mathbf{\Gamma}\mathbf{J}^T = \mathbf{\Gamma}. \quad (4.20)$$

Si osservi che moltiplicando a destra la (4.20) per $\mathbf{J}^{T^{-1}}$, si ottiene $\mathbf{J}\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{J}^{T^{-1}}$, che moltiplicata a sinistra per $\mathbf{\Gamma}$ e a destra per $-\mathbf{\Gamma}$, porta a

$$\mathbf{J}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{J} = \mathbf{\Gamma}. \quad (4.21)$$

Una matrice \mathbf{J} che soddisfa la (4.20) (o la (4.21)) è detta simplettica. La (4.20) (così come la (4.21)) è detta condizione simplettica di canonicità.

Mettiamo in luce, in base a tale condizione, gli invarianti canonici di maggiore rilevanza.

(a) Le parentesi fondamentali di Poisson.

Le parentesi
$$[Z_i, Z_j] = \frac{\partial Z_i}{\partial z_k} \gamma_{kl} \frac{\partial Z_j}{\partial z_l}$$

si possono esprimere in forma vettoriale:

$$[\mathbf{Z}, \mathbf{Z}]_z = \mathbf{J}\mathbf{\Gamma}\mathbf{J}^T,$$

per cui abbiamo che se le Z_i sono coordinate canoniche, dalla (4.20) segue che

$$[\mathbf{Z}, \mathbf{Z}]_z = \mathbf{\Gamma} \quad (\text{e, in componenti, } [Z_i, Z_j] = \gamma_{ij}); \quad (4.22)$$

la (4.22) è dunque condizione necessaria e sufficiente per la canonicità di una trasformazione indipendente dal tempo. Alla luce di ciò, nel seguente esempio seguiremo un procedimento alternativo alla ricerca di una funzione generatrice.

Esempio 4.6: *si studi la canonicità della trasformazione*

$$Z_1 = \ln \left(\frac{1}{z_1} \sin z_2 \right); \quad Z_2 = z_1 \cotan z_2.$$

Oltre ai casi banali $[Z_1, Z_1] = 0 = \gamma_{11}$ e $[Z_2, Z_2] = 0 = \gamma_{22}$, abbiamo anche che:

$$[Z_1, Z_2]_z = \frac{\partial Z_1}{\partial z_1} \frac{\partial Z_2}{\partial z_2} - \frac{\partial Z_1}{\partial z_2} \frac{\partial Z_2}{\partial z_1} = z_1 \left(-\frac{1}{z_1^2} \right) \left(-\frac{z_1}{\sin^2 z_2} \right) - \frac{1}{\sin z_2} \cos z_2 \cotan z_2 = 1 = \gamma_{12}.$$

⊙

(b) Le parentesi di Lagrange.

Dalla definizione,
$$\{A_\alpha, A_\beta\}_z = \frac{\partial Z_i}{\partial A_\alpha} \gamma_{ij} \frac{\partial Z_j}{\partial A_\beta} = \frac{\partial Z_i}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial A_\alpha} \gamma_{ij} \frac{\partial z_l}{\partial A_\beta} \frac{\partial Z_j}{\partial z_l} = \frac{\partial z_k}{\partial A_\alpha} \{z_k, z_l\}_z \frac{\partial z_l}{\partial A_\beta}.$$

Ma la (4.23) equivale a $\{z_k, z_l\}_z = \gamma_{kl}$, e, dunque, $\{A_\alpha, A_\beta\}_z = \{A_\alpha, A_\beta\}_z$.

(c) I volumi nello spazio delle fasi.

Poiché il determinante di un prodotto di matrici è uguale al prodotto dei determinanti, dalla (4.21) otteniamo che, per una trasformazione canonica,

$$\det(\mathbf{J}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{J}) = \det \mathbf{\Gamma} \implies (\det \mathbf{J})^2 \det \mathbf{\Gamma} = \det \mathbf{\Gamma},$$

per cui $|\det \mathbf{J}| = 1$ (4.23)

che fornisce un'ulteriore condizione di canonicità (per trasformazioni indipendenti dal tempo)¹ e consente la seguente deduzione sui volumi elementari nello spazio delle fasi: la trasformazione di coordinate $z \rightarrow Z$ trasforma l'elemento di volume $dv = dz_1 dz_2 \cdots dz_{2n}$ nel nuovo elemento di volume $dV = dZ_1 dZ_2 \cdots dZ_{2n}$ e, come è noto dalla teoria dell'integrazione, queste due entità sono correlate tramite il valore assoluto del determinante jacobiano della trasformazione:

$$dv = |\det \mathbf{J}| dV.$$

Dalla (4.23) segue dunque che elementi di volumi, e quindi volumi

$$\int \cdots \int dz_1 \cdots dz_{2n}$$

di arbitrarie regioni dello spazio delle fasi sono invarianti per trasformazioni canoniche.

4.5 Trasformazioni canoniche e canonoidi

Se si analizzano gli esempi (4.3)-(4.5), dovrebbe essere evidente che, benché nel corso dei calcoli la funzione di Hamilton compaia esplicitamente, essa non è mai coinvolta nelle condizioni di covarianza delle equazioni canoniche e rimane completamente arbitraria. Questo punto è ancora meglio chiarito se introduciamo per le proprietà delle trasformazioni canoniche un differente punto di vista: vedremo infatti che è caratteristico di una trasformazione canonica lasciare invariata la parentesi di Poisson (quest'ultima è una funzione di z e t : il termine *invarianza* è quello che usualmente usiamo con i campi scalari). Siccome è evidente che la definizione di quest'ultima non ha alcuna relazione con le equazioni del moto apparirà chiaro che le trasformazioni canoniche sono di natura geometrica.² L'equivalenza dei due punti di vista è mostrata nel seguente

Teorema: *siano F e G due variabili dinamiche e $[F, G]_z$ la parentesi di Poisson valutata rispetto alle variabili canoniche z . Sia inoltre $Z_i = Z_i(z, t)$ ($i = \overline{1, 2n}$) una trasformazione invertibile. Tale trasformazione è canonica se e solo se esiste un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che per ogni scelta di F e G si abbia*

$$[F', G']_Z = \lambda [F, G]_z. \tag{4.24}$$

Dimostrazione. (a) Sufficienza.

In virtù del teorema della parentesi di Poisson,

$$\frac{d}{dt} [F', G']_Z = \lambda \frac{d}{dt} [F, G]_z = \lambda [\dot{F}, G]_z + \lambda [F, \dot{G}]_z = [\dot{F}', G']_Z + [F', \dot{G}']_Z;$$

quindi, per lo stesso teorema, qualunque sia l'hamiltoniana che genera il moto $z_i(t)$, il moto $Z_i(t)$ è generato da un'hamiltoniana K : la trasformazione è canonica.

¹si può, in realtà, mostrare che il determinante dello jacobiano dev'essere uguale a ± 1 .

²In termini geometrico-differenziale si definisce la parentesi di Poisson mediante una forma differenziale bilineare, a sua volta intrinsecamente definita sulla varietà: questo è l'oggetto *geometrico* invariante per dette trasformazioni.

(b) Necessità.

Dalle proprietà delle parentesi di Poisson sappiamo che vale

$$[F, G]_z = \frac{\partial F'}{\partial Z_i} [Z_i, Z_j]_z \frac{\partial G'}{\partial Z_j}$$

ma, come abbiamo mostrato tramite la condizione simplettica, le parentesi fondamentali sono invarianti canonici:

$$[Z_i, Z_j] = \gamma_{ij} \implies [F, G]_z = \frac{\partial F'}{\partial Z_i} \gamma_{ij} \frac{\partial G'}{\partial Z_j};$$

il fattore λ può essere eliminato con una trasformazione di scala, come è mostrato in Appendice F. \square

Ora che abbiamo chiarito che la canonicità di una trasformazione, sia che venga espressa in termini di invarianza delle parentesi di Poisson o dell'esistenza di una funzione generatrice della trasformazione stessa, non fa alcun riferimento esplicito all'hamiltoniana del sistema, poniamo un problema più circoscritto: data una ben precisa hamiltoniana, è possibile trovare una trasformazione di coordinate che trasformi le particolari equazioni canoniche da essa derivate in nuove equazioni canoniche? La risposta è contenuta nel seguente

Esempio 4.7: si applichi alle equazioni del moto della particella libera con massa unitaria ($\dot{p} = 0; \dot{q} = p$) la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = q \\ P = \sqrt{p} - q^2 \end{cases} \quad \text{che, invertita, fornisce} \quad \begin{cases} q = Q \\ p = (Q^2 + P)^2. \end{cases} \quad (4.25)$$

Le equazioni del moto trasformate diventano

$$\begin{cases} \dot{Q} = \dot{q} = p = (Q^2 + P)^2 \\ \dot{P} = \frac{\dot{p}}{2\sqrt{p}} - 2q\dot{q} = -2Q(Q^2 + P)^2. \end{cases}$$

Per verificare la covarianza delle equazioni di Hamilton, dobbiamo ora provare l'esistenza di una nuova hamiltoniana $K(Q, P)$ tale che

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = (Q^2 + P)^2 \\ \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = -2Q(Q^2 + P)^2. \end{cases}$$

È facile vedere che, integrando tali equazioni, si ha $K = \frac{1}{3}(Q^2 + P)^3$.

Contrariamente all'apparenza, ciò non garantisce la canonicità della (4.27). Infatti, applicando quest'ultima alle equazioni di un altro sistema, per es. l'oscillatore armonico, si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{Q} = (Q^2 + P)^2 \\ \dot{P} = -\frac{1}{2}Q(Q^2 + P)^{-1} - 2Q(Q^2 + P)^2. \end{cases}$$

Ma in tal caso la condizione (necessaria) sull'integrabilità delle equazioni per K fornisce

$$\frac{\partial^2 K}{\partial Q \partial P} = -\frac{\partial \dot{P}}{\partial P} \neq \frac{\partial^2 K}{\partial P \partial Q} = \frac{\partial \dot{Q}}{\partial Q};$$

K dunque non esiste e la (4.19), che non lascia invariata la forma hamiltoniana di tutte le equazioni del moto di Hamilton, non è canonica. \ominus

Le trasformazioni ad hoc (come la (4.27)) che lasciano invariate in forma le equazioni di Hamilton di un particolare sistema meccanico, sono chiamate **canonoidi** rispetto a tale sistema. È evidente che una trasformazione è canonica se è canonoide rispetto a tutte le equazioni di Hamilton.

Esempio 4.8: *si provi che non esiste una funzione generatrice della trasformazione (4.27).*

Ancora una volta, si trasformi l'integrando del problema variazionale per un'arbitraria dinamica hamiltoniana:

$$P\dot{Q} - K(Q, P) = (\sqrt{p} - q^2)\dot{q} - K'(q, p) = \sqrt{p}\dot{q} - K' - \frac{d}{dt} \left(\frac{q^3}{3} \right),$$

che, anche trascurando la derivata totale rispetto al tempo, non fornisce l'espressione di una lagrangiana. Si osservi che è proprio il fattore \sqrt{p} che non consente di verificare la canonicità e, infatti, è facile provare che, viceversa, la trasformazione

$$Q = q; \quad P = p - q^2,$$

che della (4.27) cambia solo il ruolo della p , è canonica, con funzione generatrice $F_2 = qP + \frac{q^3}{3}$.

5 GRUPPI A UN PARAMETRO DI TRASFORMAZIONI CANONICHE.

Si consideri un sistema di particelle descritte da coordinate cartesiane e momenti $p = m\dot{x}$ e supponiamo che ognuna di tali coordinate possa variare sull'intero asse reale. Se eseguiamo una traslazione o una rotazione degli assi, i nuovi valori di x e p rientrano in detto range: per es., la coordinata $X_i = x_i + a$ ($a \in \mathbb{R}$) ottenuta per traslazione ha lo stesso range di variabilità di x_i , cioè tutto \mathbb{R} . Dunque questo tipo di trasformazione di coordinate può essere visto come una trasformazione dello spazio delle fasi in sè stesso, nel senso che il valore delle nuove coordinate in un certo punto dello spazio uguaglia quello delle vecchie in un altro punto dello stesso spazio. Questa proprietà non è comune a tutti i tipi di trasformazione: quando sarà possibile realizzare una trasformazione canonica (che sia 1-1 e invertibile) dello spazio delle fasi in sè stesso, parleremo di trasformazioni canoniche regolari. Ovviamente, esse costituiscono un sottogruppo delle trasformazioni canoniche: per es. la trasformazione

$$Q = \frac{1}{2}(q^2 + p^2); \quad P = -\operatorname{artan} \frac{q}{p}$$

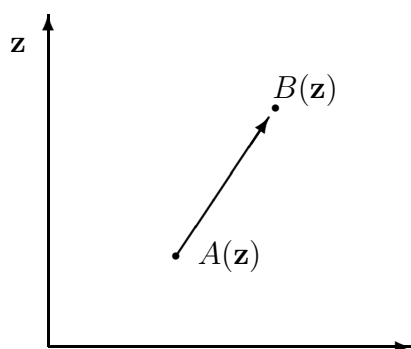
è sicuramente canonica ($[Q, P]_{q,p} = 1$) ma non è regolare: essa infatti non è definita sulla retta $p = 0$.

In questo capitolo faremo l'ipotesi di considerare trasformazioni canoniche che siano applicazioni biunivoche e C^∞ (cioè infinitamente differenziabili) assieme alla loro inversa: supporremo cioè che siano dei diffeomorfismi.

Con queste ipotesi, una trasformazione di coordinate può essere trattata sotto due diversi punti di vista: quello usuale, in cui uno stesso punto che descrive lo stato del sistema è descritto da due diversi spazi delle fasi, da due diversi sistemi di coordinate (*punto di vista passivo*):



e quello ora introdotto (*punto di vista attivo*) in cui il punto viene spostato dalla trasformazione in un altro punto dello stesso spazio:



Interpretazione attiva: le Z_i sono le coordinate di un altro punto dello stesso spazio. Se la trasformazione è infinitesima, il vettore spostamento in figura rappresenta la quantità δz ed è tangente alla curva lungo cui avviene la trasformazione.

Le due interpretazioni possono essere usate alternativamente; quella attiva è particolarmente vantaggiosa per una descrizione geometrica, indipendente dalle coordinate; quella passiva per effettuare calcoli in coordinate. Si deve comunque prestare attenzione quando si valuta l'effetto di una trasformazione su una funzione definita sullo spazio delle fasi: nel caso di trasformazione passiva una funzione F avrà lo stesso valore numerico sia che venga valutata nel punto A che nel punto A' :

$$F(z) = F'(Z), \quad (5.1)$$

quello che cambierà, in generale, sarà l'espressione funzionale. Nel caso di trasformazione attiva, invece, F assumerà valori in generale differenti a seconda che venga valutata in A o in B : avremo quindi una variazione in forma funzionale per la trasformazione passiva, una variazione numerica per quella attiva.

5.1 Trasformazioni canoniche infinitesime.

Assumiamo che le trasformazioni siano regolari e costruiamo una teoria in cui in ogni valutazione si trascurino infinitesimi superiori al primo ordine di approssimazione.

Una trasformazione canonica infinitesima

$$\begin{cases} Q_i = q_i + \delta q_i \\ P_i = p_i + \delta p_i \end{cases} \quad (5.2)$$

differisce di quantità infinitesime dalla trasformazione identità e dunque viene generata da

$$F_2 = q_i P_i + \delta \lambda G(q, P, t),$$

$\delta\lambda$ essendo una quantità infinitesima del primo ordine. Poiché

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i + \delta\lambda \frac{\partial G}{\partial q_i} \implies \delta p_i = P_i - p_i = -\delta\lambda \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

$$\text{e} \quad G(q, P, t) = G(q, p, t) + \left. \frac{\partial G}{\partial P_i} \right|_{P_i=p_i} \delta p_i + \dots$$

abbiamo, al primo ordine di approssimazione, $G(q, P, t) = G(q, p, t) - \delta\lambda \left. \frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial P_i} \right|_{P_i=p_i}$

e dunque possiamo porre $\delta\lambda G(q, P, t) = \delta\lambda G(q, p, t)$,

e scrivere le altre n equazioni di trasformazione come $\delta q_i = \delta\lambda \frac{\partial G}{\partial p_i}(q, p, t)$ da cui, in sintesi,

$$\boxed{\delta \mathbf{z} = \delta\lambda \mathbf{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{z}}.} \quad (5.3)$$

Le (5.3) sono le equazioni delle trasformazioni canoniche infinitesime. Esse si prestano particolarmente alla trattazione *attiva*, e, dunque, dovremo sempre immaginare che, per effetto delle (5.3), il punto rappresentativo venga spostato nel punto di coordinate $\mathbf{z} + \delta\mathbf{z}$, all'interno del medesimo spazio delle fasi.

Esempio 5.1: *il moto come trasformazione canonica lungo le traiettorie parametrizzate dal tempo.*

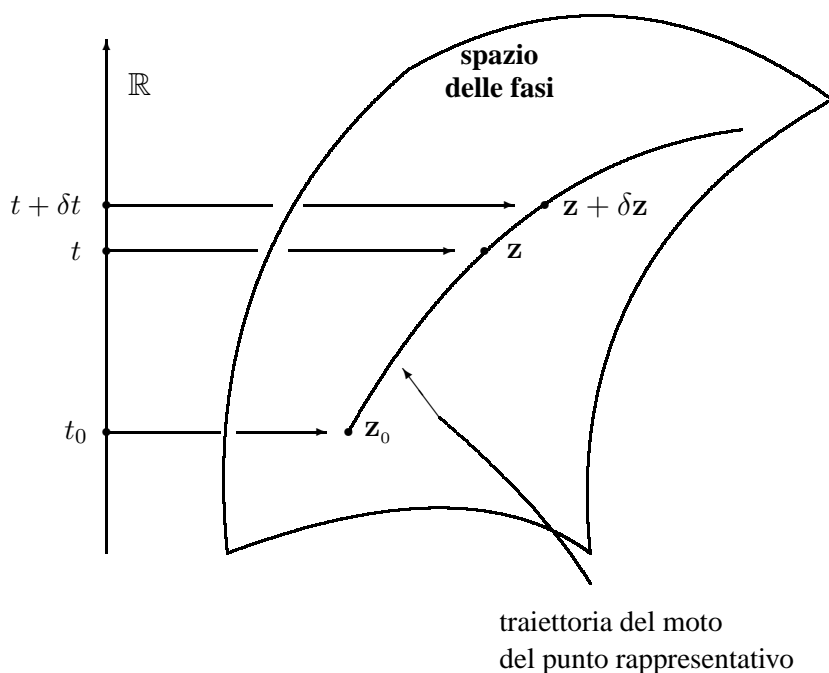
Se nella (5.3) poniamo $G = H$ e $\lambda = t$, otteniamo

$$d\mathbf{z} = dt \mathbf{\Gamma} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}},$$

che, appunto, fornisce la variazione infinitesima di \mathbf{z} per effetto del moto. Consideriamo piú in specifico il caso di una particella libera, le cui equazioni del moto sono $\dot{z}_1 = z_2; \quad \dot{z}_2 = 0$,

e assumiamo il punto di vista attivo, in cui $\begin{cases} Z_1(t) = z_1(t + \delta t) \\ Z_2(t) = z_2(t + \delta t) \end{cases}$

il tempo parametrizza la traiettoria descritta dal punto rappresentativo. $\mathbf{Z} = \mathbf{z} + \delta\mathbf{z}$ individua, nel caso in esame, la posizione del punto rappresentativo dopo un intervallo infinitesimo di tempo δt .



L'integrazione delle equazioni differenziali fornisce $\begin{cases} z_1 = z_2^0 t + z_1^0 \\ z_2 = z_2^0 \end{cases}$ (dove $z_i^0 = z_i(0)$).

Conseguentemente, $\begin{cases} Z_1(t) = z_1(t + \delta t) = z_2^0 t + z_2^0 \delta t + z_1^0 = z_1(t) + z_2 \delta t \\ Z_2(t) = z_2(t + \delta t) = z_2^0 = z_2. \end{cases}$

Dall'usuale schema per le equazioni delle trasformazioni canoniche otteniamo

$$\begin{cases} Z_1 = \frac{\partial F_2}{\partial Z_2} = z_1 + \delta t z_2^0 \\ z_2 = \frac{\partial F_2}{\partial z_1} = Z_2 \end{cases} \implies F_2 = z_1 Z_2 + \delta t \frac{1}{2} (z_2)^2$$

che mostra che l'hamiltoniana del sistema, $H = \frac{1}{2} (z_2)^2 = \frac{1}{2} (z_2^0)^2$, è la funzione generatrice del moto (infinitesimo) del sistema. \ominus

Esempio 5.2 *La componente $\mathbf{L} \cdot \mathbf{n}$ del momento angolare lungo l'asse di versore \mathbf{n} genera le rotazioni infinitesime attorno a tale asse.*

Ruotiamo il vettore posizione di un punto materiale di massa unitaria (l'estensione a N punti è immediata) di un angolo infinitesimo $\delta\theta$ attorno all'asse z . Le (5.3) implicano che, essendo $L_z = xp_y - yp_x$

$$\begin{cases} \delta x = \delta\theta \frac{\partial L_z}{\partial p_x} = -y\delta\theta \\ \delta y = \delta\theta \frac{\partial L_z}{\partial p_y} = x\delta\theta \\ \delta z = \delta\theta \frac{\partial L_z}{\partial p_z} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} X = x - y\delta\theta \\ Y = y + x\delta\theta \\ Z = z \end{cases}$$

Queste stesse equazioni di trasformazione si sarebbero potute ottenere sviluppando in serie di Taylor la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

al primo ordine di approssimazione, ottenendo così la somma della matrice identità e della

$$\begin{pmatrix} 0 & -\delta\theta & 0 \\ \delta\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ che produce la stessa trasformazione (infinitesima) generata da } L_z.$$

Si noti che la rotazione infinitesima è una trasformazione di punto, per cui i momenti coniugati si trasformano di conseguenza:

$$\begin{cases} \delta p_x = -p_y \delta\theta \\ \delta p_y = p_x \delta\theta \\ \delta p_z = 0. \end{cases}$$

\ominus

Esempio 5.3: *la quantità di moto di un sistema di punti è la generatrice delle traslazioni infinitesime dei punti stessi.*

Se la traslazione avviene, p.es., lungo l'asse x , la componente p_x della quantità di moto genera una traslazione δa_x : ancora dalle (5.3) si ha

$$X - x = \delta x = \delta a_x; \quad \delta y = \delta z = 0$$

\ominus

5.2 Dalle trasformazioni infinitesime a quelle finite.

A partire dalla (5.3) è possibile un ulteriore sviluppo della teoria delle trasformazioni canoniche: abbiamo descritto l'azione delle trasformazioni canoniche infinitesime nei termini (attivi) di uno *spostamento infinitesimo* nello spazio delle fasi e vogliamo chiederci ora se, per giunta, una successione di trasformazioni canoniche infinitesime produce una trasformazione canonica finita (e viceversa: una trasformazione canonica finita può essere scritta come successione di trasformazioni infinitesime?). La risposta risiede nell'analisi del sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dz_i}{d\lambda} = \gamma_{ij} \frac{\partial G}{\partial z_j} \quad (5.4)$$

ricavato dalla (5.3): la sua soluzione è una curva nello spazio delle fasi parametrizzata da $\lambda \in \mathbb{R}$ e gli incrementi δz , prodotti dalle trasformazioni attive, sono avanzamenti lungo tale curva. Le (5.4) costituiscono un sistema di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine in forma normale. Assegnati $2n$ valori iniziali (valutati in $\lambda = 0$) ci sarà per esso un'unica soluzione che scriveremo come

$$z_i = \psi_i(z^0, \lambda), \quad (i = \overline{1, 2n}) \quad \text{dove} \quad z_i^0 = \psi_i(z^0, 0). \quad (5.5)$$

Trattando anche le z_i^0 come parametri, la (5.4) può essere riscritta come

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \lambda}(z^0, \lambda) = \gamma_{ij} \frac{\partial G}{\partial z_j} \Big|_{z_j = \psi_j(z^0, \lambda)} = \gamma_{ij} \frac{\partial G}{\partial \psi_j}. \quad (5.6)$$

Diventa ora essenziale mostrare che dalla (5.6) discende il seguente:

Lemma: *le parentesi di Lagrange*

$$\{z_i^0, z_j^0\}_\psi$$

non dipendono esplicitamente da λ .

La dimostrazione è diretta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \{z_i^0, z_j^0\}_\psi &= \gamma_{kl} \frac{\partial \psi_l}{\partial z_j^0} \frac{\partial}{\partial z_i^0} \frac{\partial \psi_k}{\partial \lambda} + \gamma_{kl} \frac{\partial \psi_k}{\partial z_i^0} \frac{\partial}{\partial z_j^0} \frac{\partial \psi_l}{\partial \lambda} = \gamma_{kl} \frac{\partial \psi_l}{\partial z_j^0} \frac{\partial}{\partial z_i^0} \left(\gamma_{km} \frac{\partial G}{\partial \psi_m} \right) + \\ &\gamma_{kl} \frac{\partial \psi_k}{\partial z_i^0} \frac{\partial}{\partial z_j^0} \left(\gamma_{ln} \frac{\partial G}{\partial \psi_n} \right) = \frac{\partial \psi_m}{\partial z_j^0} \frac{\partial}{\partial \psi_n} \left(\frac{\partial G}{\partial \psi_m} \right) \frac{\partial \psi_n}{\partial z_i^0} - \frac{\partial \psi_n}{\partial z_i^0} \frac{\partial}{\partial \psi_m} \left(\frac{\partial G}{\partial \psi_n} \right) \frac{\partial \psi_m}{\partial z_j^0} = 0. \end{aligned}$$

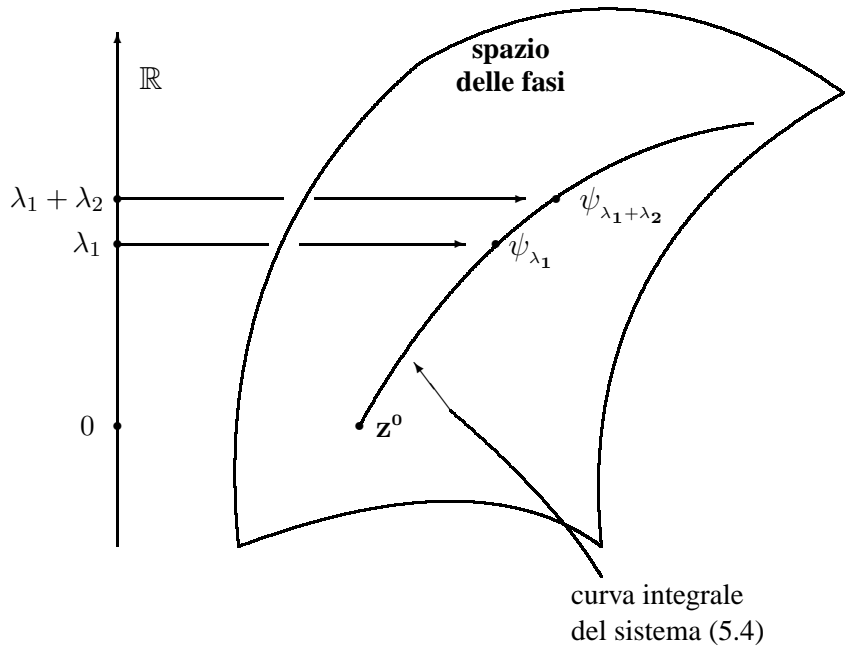
Immediata conseguenza del lemma è che

$$\{z_i^0, z_j^0\}(\lambda) = \{z_i^0, z_j^0\}(0) = \frac{\partial z_k^0}{\partial z_i^0} \gamma_{kl} \frac{\partial z_l^0}{\partial z_j^0} = \gamma_{ij} \implies [z_i^0, z_j^0] = \gamma_{ij},$$

dove l'ultima implicazione, basata sulla relazione di reciprocità tra parentesi di Poisson e Lagrange, esprime l'invarianza delle parentesi fondamentali di Poisson sotto la trasformazione $z \rightarrow z^0$. Abbiamo quindi dimostrato che le (5.5) sono trasformazioni canoniche. Ogni punto della curva $z_i = \psi_i(z^0, \lambda)$ è allora ottenibile con una trasformazione canonica $z^0 \rightarrow z$ che muove il punto rappresentativo dalla condizione iniziale alla configurazione associata al generico valore di λ . In Appendice G si mostra che se G non dipende esplicitamente da λ , le trasformazioni (5.5) hanno la particolare struttura di gruppo a un parametro.

Indicando con ψ_λ la posizione del punto rappresentativo corrispondente al valore λ , la struttura di gruppo richiede le seguenti proprietà:

- (a) ψ_0 è la trasformazione identità;
 - (b) $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1} = \psi_{\lambda_1 + \lambda_2}$
 - (c) $\psi_{-\lambda}$ è la trasformazione inversa di ψ_λ .
- Il punto rappresentativo si sposta lungo la curva integrale del sistema differenziale (5.4) corrispondente alla condizione iniziale $z_i(z^0, 0) = z_i^0$. Ad ogni valore del parametro corrisponde un elemento ψ_λ del gruppo di trasformazioni che determina un ben determinato punto sulla curva. Il punto si muove con continuità a partire da z^0 .



Abbiamo visto quindi che ogni trasformazione canonica (regolare) può essere vista come elemento di un gruppo a un parametro di trasformazioni; studiamo adesso come esprimere le equazioni per le trasformazioni finite, a partire dalla funzione generatrice della trasformazione canonica infinitesima. Premettiamo la seguente proprietà:

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} = 0 \implies \frac{dG}{d\lambda} = 0.$$

Infatti, dalla (5.6),

$$\frac{dG}{d\lambda} = \frac{\partial G}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial \lambda} + \frac{\partial G}{\partial \lambda} = \frac{\partial G}{\partial \psi_i} \gamma_{ij} \frac{\partial G}{\partial \psi_j} + \frac{\partial G}{\partial \lambda} = [G, G] + \frac{\partial G}{\partial \lambda}.$$

Da qui in avanti ipotizziamo che G sia indipendente da λ ; conseguentemente possiamo riscrivere la (5.6) come segue:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \lambda} = [\psi_i(z^0, \lambda), G(\psi(z^0, \lambda))]_{\psi} = [\psi_i(z^0, \lambda), G(z^0)]_{z^0}. \quad (5.7)$$

La (5.7) porta ad un risultato formalmente essenziale. Infatti, consideriamo lo sviluppo in serie di potenze di λ della funzione $z_i = \psi_i(z^0, \lambda)$:

$$\psi_i(z^0, \lambda) = \psi_i(z^0, 0) + \lambda \left. \frac{\partial \psi_i}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} + \frac{\lambda^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=0} + \frac{\lambda^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \psi_i}{\partial \lambda^3} \right|_{\lambda=0} + \dots;$$

questo può essere riscritto in forma maggiormente significativa se si tiene conto che, facendo uso della (5.7), si ha

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \psi_i}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} &= [z_i^0, G(z_i^0)]_{z^0}; & \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \lambda^2} &= \left[\left. \frac{\partial \psi_i}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}, G \right]_{z^0} \implies \left. \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=0} = \left[\left. \frac{\partial \psi_i}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}, G \right]_{z^0} = [[z_i^0, G], G]_{z^0} \\ \left. \frac{\partial^3 \psi_i}{\partial \lambda^3} \right|_{\lambda=0} &= \left[\left. \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=0}, G \right]_{z^0} = [[[z_i^0, G], G], G]_{z^0} \dots \text{e così via.} \end{aligned}$$

Tenendo conto di queste ultime, otteniamo

$$z_i = \psi_i(z^0, \lambda) = z_i^0 + \lambda [z_i^0, G] + \frac{\lambda^2}{2!} [[z_i^0, G], G] + \frac{\lambda^3}{3!} [[[z_i^0, G], G], G] + \dots \quad (5.8)$$

da cui si vede che le parentesi di Poisson rivestono all'interno del formalismo canonico un duplice ruolo fondamentale: quello di invariante canonico e questo di elemento formale di base per la costruzione della trasformazione stessa.

Forniamo ora un'ulteriore e piú sintetica espressione per ψ introducendo l'operatore (differenziale lineare) associato alla funzione generatrice G :

$$G \longrightarrow \hat{G} := \gamma_{ij} \frac{\partial G}{\partial z_i^0} \frac{\partial}{\partial z_j^0}$$

definito dalla seguente azione sulle funzioni:

$$\hat{G}(f) = \gamma_{ij} \frac{\partial G}{\partial z_i^0} \frac{\partial f}{\partial z_j^0} = [G, f]_{z^0}.$$

Applicazioni successive di \hat{G} saranno indicate con le potenze dell'operatore stesso: p.es.

$$\hat{G}(\hat{G}(f)) = \hat{G}^2(f) = [G, [G, f]].$$

Conseguentemente, si ottiene l'espressione

$$z_i = z_i^0 - \lambda \hat{G}(z_i^0) + \frac{\lambda^2}{2!} \hat{G}^2(z_i^0) - \frac{\lambda^3}{3!} \hat{G}^3(z_i^0) + \dots,$$

che ricorda formalmente lo sviluppo in serie della funzione esponenziale $y = e^{-x}$ per cui¹ useremo la notazione sintetica

$$\boxed{z_i = e^{-\lambda \hat{G}} z_i^0.} \quad (5.9)$$

L'esponenziazione dell'operatore \hat{G} , come appare nella (5.9), ci permette di avere infine una sintesi dell'intero procedimento: l'azione di $\lambda \hat{G}$ comporta un avanzamento infinitesimo del punto rappresentativo lungo le curve integrali della (5.3); la sua esponenziazione fornisce un avanzamento finito (per qualsiasi valore del parametro).

La (5.9) è facilmente generalizzabile a funzioni di z e, a tale scopo, è utile premettere alcune considerazioni su una nuova notazione. Si tratta, in sintesi, di fare uso dell'uguaglianza numerica tra due campi scalari anche nella visione attiva, dove in generale $F(z^0 + \delta z) \neq F(z^0)$. Poiché dal punto di vista passivo permane un'uguaglianza numerica tra funzione calcolata nelle vecchie coordinate e quella nelle nuove, possiamo tradurre questa proprietà introducendo la funzione

$$F_\lambda(z^0) = F(z) = F(\psi(z^0, \lambda)) \quad \text{con} \quad F_0(z^0) = F(z^0).$$

La funzione F_λ esprime per ogni valore di λ la nuova forma funzionale dovuta alla trasformazione passiva: ma ciò corrisponde a individuare una funzione che, calcolata nella condizione iniziale z^0 , uguaglia numericamente la funzione F valutata in $z(\lambda)$. Diremo che F_λ è il pullback di F rispetto alla trasformazione $z^0 \longrightarrow z$. L'idea di pullback è alquanto generale, ma per i nostri scopi ci limiteremo alle funzioni scalari; per una piú dettagliata definizione e una visualizzazione geometrica si veda l'Appendice L.

Poniamo ora in luce l'azione, al variare di λ , di una trasformazione continua su una funzione $F(z^0)$: essendo

$$\frac{\partial F_\lambda}{\partial \lambda}(z^0) = \frac{\partial F}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial \lambda} = \frac{\partial F}{\partial \psi_i} \gamma_{ij} \frac{\partial G}{\partial \psi_j} = [F, G]_\psi = [F_\lambda, G]_{z^0},$$

con gli stessi passaggi usati per sviluppare $F = z_i$, si può esprimere $F_\lambda(z^0)$ come serie di potenze di λ :

$$F(z) = F_\lambda(z^0) = F_0(z^0) + \lambda \left. \frac{\partial F_\lambda}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} + \frac{\lambda^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 F_\lambda}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=0} + \dots = F(z^0) + \lambda [F, G] + \frac{\lambda^2}{2!} [[F, G], G] + \dots$$

¹si ricordi l'approccio formale agli operatori di rotazione per il corpo rigido.

Anche questo sviluppo in serie di potenze di λ può essere scritto come:

$$\boxed{F(z) = e^{-\lambda \hat{G}} F(z^0)}. \quad (5.10)$$

Si noti che il termine di destra della (5.10) è una funzione valutata in z^0 , dunque è proprio l'espressione analitica del pullback.

Esempio 5.4. *Rotazioni infinitesime* \rightarrow *rotazioni finite.*

Come abbiamo visto, $L_z = xp_y - yp_x$ genera le rotazioni infinitesime attorno all'asse z . Costruiamo ora la serie (5.9) facendo uso dell'operatore associato a L_z ,

$$\hat{L}_z = \frac{\partial L_z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p_x} + \frac{\partial L_z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial p_y} - \frac{\partial L_z}{\partial p_x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial L_z}{\partial p_y} \frac{\partial}{\partial y} = p_y \frac{\partial}{\partial p_x} - p_x \frac{\partial}{\partial p_y} + y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Applicando successivamente questo operatore, si ottiene:

$$\begin{aligned} \hat{L}_z(x) &= [L_z, x] = y \\ \hat{L}_z^2(x) &= -x \\ \hat{L}_z^3(x) &= -y; \end{aligned}$$

La (5.9) diviene ora
$$X = x - y\theta - x \frac{\theta^2}{2!} + y \frac{\theta^3}{3!} + x \frac{\theta^4}{4!} + \dots =$$

$$\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) x - \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots\right) y = x \cos \theta - y \sin \theta$$

che è proprio l'equazione di trasformazione per le ascisse quando il sistema viene ruotato di un angolo finito θ attorno all'asse z . ⊗

Esempio 5.5. *Particella nel campo di potenziale* $V = \frac{mk}{x^2}$.

Essendo $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{mk}{x^2}$ l'hamiltoniana del sistema, il generatore infinitesimo del moto è:

$$\hat{H} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{2mk}{x^3} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Studiamo ora l'evoluzione temporale della funzione $F = x^2$: secondo la (5.10) si ha:

$$x^2 = e^{-t\hat{H}} x_0^2 = x_0^2 + 2t \frac{p_0 x_0}{m} + \frac{t^2}{2!} \frac{4H}{m}.$$

Lo sviluppo si arresta al secondo ordine in quanto

$$\hat{H}^n(x_0^2) = 0 \text{ per } n \geq 3.$$

perché compare sempre un termine del tipo $[H, H]$ come si può verificare direttamente. Se scegliamo le condizioni iniziali $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = 0$ otteniamo la soluzione

$$t \mapsto x(t) = \left(x_0^2 + \frac{2k}{x_0^2} t^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad \otimes$$

Esercizio. Sia $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$ l'hamiltoniana di un oscillatore armonico e siano $x(0) = x_0$ e $p(0) = p_0$ le condizioni iniziali del moto. Si mostri che l'evoluzione temporale è data da

$$x(t) = e^{-t\hat{H}} x_0 = x_0 \cos \omega t + \frac{p_0}{m\omega} \sin \omega t \quad p(t) = e^{-t\hat{H}} p_0 = -m\omega x_0 \sin \omega t + p_0 \cos \omega t.$$

5.3 La versione hamiltoniana del teorema di Noether.

Se una trasformazione infinitesima è pensata in termini attivi, la variazione

$$\delta F(z) = F(z) - F(z^0) = F(z^0 + \delta z) - F(z^0) = \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{z^0} \delta z \quad (5.11)$$

fornisce la variazione numerica (al primo ordine di approssimazione) tra i valori assunti da una stessa funzione nello stesso spazio delle fasi.

Se, per di piú, la trasformazione è canonica, la (5.11), mediante la (5.3), diviene

$$\delta F = \delta \lambda \frac{\partial F}{\partial z_i} \gamma_{ij} \frac{\partial G}{\partial z_j} = \delta \lambda [F, G]. \quad (5.12)$$

D'altra parte, una trasformazione (canonica) di coordinate comporta una variazione della forma funzionale dei campi scalari:

$$z^0 \longrightarrow z \implies F'(z) = F(z^0);$$

volendo quantificare questa variazione, è conveniente confrontare F e F' nello stesso punto dello spazio delle fasi: dal punto di vista attivo è allora utile definire variazione in forma la quantità

$$\delta_\lambda F = F_\lambda(z^0) - F(z^0). \quad (5.13)$$

Poiché, sempre al primo ordine di approssimazione, $\delta_\lambda F = F_\lambda(z^0) - F(z) + \delta F$, si ha che

$$\delta_\lambda F = \delta \lambda [F, G]. \quad (5.14)$$

Le (5.12) e (5.14) non possono essere in generale utilizzate per valutare trasformazioni infinitesime dell'hamiltoniana di un sistema, in quanto l'hamiltoniana non segue le leggi di trasformazione di uno scalare. In altri termini, la relazione

$$H'(z) = H(z^0)$$

indica come la funzione H si trasforma per un cambio di coordinate, ma il fatto è che H' non è, in generale, la nuova hamiltoniana per le nuove coordinate canoniche. Infatti ricordiamo che la relazione tra le hamiltoniane dei due sistemi canonici connessi da una trasformazione canonica generata da

$$F = q_i^0 p_i + \delta \lambda G(q, p, t)$$

è data da

$$K(z) = H(z^0) + \delta \lambda \frac{\partial G}{\partial t}. \quad (5.15)$$

Ha allora senso parlare di variazione in forma solo se si confrontano le espressioni funzionali di H e K : definiamo dunque la variazione in forma dell'hamiltoniana:

$$\Delta H := K(z) - H(z). \quad (5.16)$$

Dalla (5.15), e tenendo conto della (5.12), si ha che:

$$\delta \lambda \frac{\partial G}{\partial t} = K(z) - H(z^0) = K(z) - H(z) + \delta H = \Delta H + \delta \lambda [H, G].$$

Quindi,

$$\Delta H = -\delta \lambda [H, G] + \delta \lambda \frac{\partial G}{\partial t} = \delta \lambda \frac{dG}{dt}. \quad (5.17)$$

Se \hat{G} è una **simmetria dell'hamiltoniana**, se cioè G è la funzione generatrice di una trasformazione infinitesima che lascia invariata in forma l'hamiltoniana ($\Delta H = 0$), tramite la (5.17) resta dimostrata la versione hamiltoniana del teorema di Noether e del suo inverso.

Teorema: *ad ogni simmetria dell'hamiltoniana corrisponde una costante del moto (che è proprio la funzione generatrice di tale simmetria). Inversamente, ogni costante del moto è la funzione generatrice di una simmetria dell'hamiltoniana. Le simmetrie dell'hamiltoniana sono anche simmetrie delle equazioni del moto.*

Quest'ultima proprietà (che assicura oltre alla covarianza anche l'invarianza) deriva dal fatto che, se $\Delta H = 0$ e la trasformazione è canonica, le equazioni di Hamilton si trasformano come segue:

$$\dot{z}_i^0 = \gamma_{ij} \frac{\partial H}{\partial z_j^0} \longrightarrow \dot{z}_i = \gamma_{ij} \frac{\partial H}{\partial z_j}$$

che palesemente sono equazioni differenziali invarianti in forma.

Esempio 5.6: *se un punto si muove di moto centrale nel piano xOy , le rotazioni infinitesime attorno all'asse z sono simmetrie infinitesime per l'hamiltoniana. La componente del momento angolare lungo tale asse è, come sappiamo, la generatrice della trasformazione e, dunque, è una costante del moto.*

$$\text{Infatti: } H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + V(\sqrt{x^2 + y^2}) \Rightarrow \delta H = \frac{1}{2m} (p_x \delta p_x + p_y \delta p_y) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} (x \delta x + y \delta y),$$

ma ricordando la trasformazione generata da L_z (vds. Es. 5.2), si ha immediatamente che $\delta H = 0$.

Allo stesso risultato si poteva pervenire verificando che $\Delta H = \delta \theta [L_z, H] = 0$. ⊙

Esempio 5.7: *trascinamenti infinitesimi.*

Supponiamo che la trasformazione tra due osservatori inerziali consista in un trascinamento infinitesimo lungo l'asse delle x :

$$\delta x_i = t \delta v; \quad \delta y_i = 0; \quad \delta z_i = 0,$$

e che il sistema osservato sia isolato: conseguentemente, la funzione di Hamilton per tale sistema è della forma:

$$H = \sum_i \frac{p_{x_i}^2 + p_{y_i}^2 + p_{z_i}^2}{2m_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij}(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|)$$

e i momenti si trasformano secondo le

$$\delta p_{x_i} = m_i \delta v; \quad \delta p_{y_i} = 0; \quad \delta p_{z_i} = 0.$$

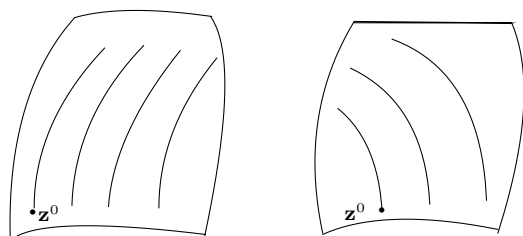
Questa trasformazione è canonica e, come si può verificare, è generata da $G = \sum_i (p_{x_i} t - m_i x_i)$. Al primo ordine di approssimazione,

$$K(Z) = H'(Z) + \delta v \sum_i P_{X_i} = \sum_i \frac{P_i^2}{2m_i} + \sum_i \frac{(\delta p_{x_i})^2}{2m_i} - \sum_i \frac{P_{X_i} \delta p_{x_i}}{m_i} + V + \sum_i P_{X_i} \delta v$$

uguaglia in forma H . Dunque $\Delta H = 0$ e G è una costante del moto. Si noti che in questo esempio l'hamiltoniana non è invariante numericamente proprio perchè $\frac{\partial G}{\partial t} \neq 0$; le variazioni ΔH e $\delta_\lambda H$ coincidono solo per trasformazioni canoniche che non dipendano esplicitamente dal tempo. ⊙

5.4 Generatori del gruppo di Galileo.

Negli esempi di questo capitolo abbiamo dato una rilettura hamiltoniana del gruppo di trasformazioni di Galileo: rispetto alla trattazione lagrangiana, ora abbiamo caratterizzato ogni trasformazione mediante un operatore che la genera: \hat{H} , $\widehat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{n}$, \hat{P} , \hat{G} generano, rispettivamente, le traslazioni temporali, le rotazioni, le traslazioni spaziali, i trascinamenti. Poiché si parla di gruppo, vale la pena vedere in pratica come si compongono tra di loro le trasformazioni.



Curve integrali, rispettivamente, delle equazioni

$$\frac{dz}{dt} = \Gamma \frac{\partial H}{\partial z}$$

$$\frac{dz}{d\lambda} = \Gamma \frac{\partial G}{\partial z} :$$
 ogni curva corrisponde ad una diversa condizione iniziale.

A sinistra sono tracciate, sullo spazio delle fasi, le soluzioni $z = \psi(z^0, t)$ delle equazioni del moto; le curve sono parametrizzate dal tempo t , e viste nell'ambito della teoria delle trasformazioni canoniche regolari, rappresentano, ciascuna, la trasformazione generata dall'Hamiltoniana. A destra, il parametro è λ e la trasformazione canonica è generata da G (per es. L_i): anche qui lo spazio delle fasi è trasformato in sé stesso facendo avanzare i suoi punti lungo le curve qui tracciate (p.es. ruotandoli).

L'applicazione successiva di due operatori, p. es. \hat{H} e \hat{L}_i , risulta ben definita:

$$\hat{H}(\hat{L}_i(f)) = [H, [L_i, f]].$$

\hat{H} e \hat{L}_i sono operatori lineari e non è affatto scontato che si possa permutare la loro azione sulle funzioni: infatti, sfruttando l'identità di Jacobi, si ha

$$\hat{L}_i(\hat{H}(f)) = [L_i, [H, f]] = [[L_i, H], f] + [H, [L_i, f]].$$

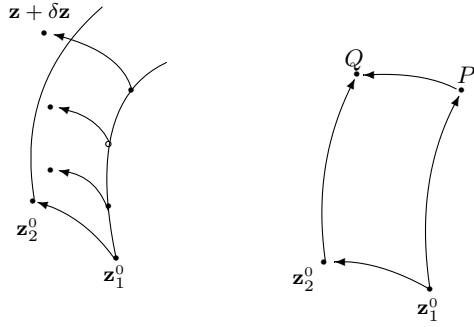
Introduciamo allora il **commutatore**⁴ tra i generatori infinitesimi:

$$[\hat{L}_i, \hat{H}](f) := \hat{L}_i(\hat{H}(f)) - \hat{H}(\hat{L}_i(f)) = [[L_i, H], f]. \quad (5.18)$$

Il commutatore è nullo, per ogni funzione f , se L_i è una costante del moto. Questo è un altro modo di vedere le connessioni tra simmetrie e leggi di conservazione: l'annullarsi del commutatore significa in pratica che, a partire da una data condizione iniziale, abbiamo effettuato, nell'ordine, una rotazione infinitesima e un avanzamento temporale pervenendo nello stesso punto dello spazio delle fasi che avremmo raggiunto a trasformazioni invertite. Detto in altre parole, se applichiamo \hat{L}_i sia al punto iniziale z^0 che al punto evoluto $z(t)$, $\hat{L}_i(z^0)$ e $\hat{L}_i(z(t))$ appartengono alla stessa curva del moto: la trasformazione generata da \hat{L}_i trasforma dunque soluzioni in soluzioni delle stesse equazioni del moto.

Raffiguriamo questa conclusione in modo intuitivo: nella figura che segue, a destra è proprio rappresentata la commutabilità degli operatori, nel senso che per pervenire ad una stessa fase finale, la composizione delle due trasformazioni non dipende dall'ordine secondo cui viene effettuata; nell'immagine di sinistra, al contrario, vi è una generica trasformazione che non rappresenta una simmetria dinamica.

⁴non essendoci ambiguità tra le notazioni di funzioni e operatori, useremo lo stesso simbolo per ogni tipo di parentesi di Lie.



Nella figura di sinistra l'azione del generatore \hat{G} trasforma la condizione iniziale \mathbf{z}_1^0 (cui corrisponde la soluzione $\mathbf{z} = \psi(\mathbf{z}_1^0, t)$) in quella \mathbf{z}_2^0 (cui corrisponde la curva $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{z}_2^0, t)$). L'intera soluzione viene però trasformata in una curva che non si sovrappone a $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{z}_2^0, t)$: l'effetto di tutta l'operazione è di aver trasformato la soluzione di un'equazione del moto nella soluzione di una differente equazione del moto.

Al contrario, nella seconda figura, il punto Q è ottenuto sia dall'evoluzione dinamica di \mathbf{z}_2^0 che dalla variazione $\delta\mathbf{z}$ generata da \hat{G} sul punto P , che, a sua volta, rappresenta la fase del sistema raggiunta al tempo dt , a partire dalla condizione iniziale \mathbf{z}_1^0 . La trasformazione (finita o infinitesima) generata da \hat{G} trasforma soluzioni in soluzioni della stessa equazione differenziale.

L'annullarsi del commutatore $[H, L_i]$ implica che $\hat{H}(L_i) = 0$, dunque che L_i resta costante lungo le curve del moto. Alla stessa conclusione si perviene facendo uso dello sviluppo (5.10) che, per il caso in questione, fornisce:

$$L_i(z) = e^{-t\hat{H}} L_i(z^0) = L_i(z^0).$$

Generalizzando le considerazioni precedenti a generatori infinitesimi qualsiasi scriveremo, ovviamente, che

$$\begin{aligned} \hat{G}_1(\hat{G}_2(f)) &= [G_1, [G_2, f]], & [\hat{G}_1, \hat{G}_2](f) &= [[G_1, G_2], f]; \\ \hat{G}_2(G_1) = 0 &\implies G_1 \text{ è costante lungo le curve generate da } \hat{G}_2. \end{aligned}$$

Esempio 5.8: si esprima in coordinate l'operatore $[\hat{H}, \hat{L}_z]$ e lo si valuti per un sistema isolato.

Sfruttando l'identità di Jacobi e la definizione di generatore, si ha che, per ogni funzione f ,

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{L}_z](f) &= [[H, L_z], f] = \frac{\partial}{\partial z_i} [H, L_z] \gamma_{ij} \frac{\partial f}{\partial z_j} \\ \implies [\hat{H}, \hat{L}_z] &= \frac{\partial}{\partial z_k} [H, L_z] \gamma_{kj} \frac{\partial}{\partial z_j}. \end{aligned}$$

Analogamente, si possono valutare tutte le parentesi di Lie (commutatori) dei generatori delle trasformazioni di Galileo: si individua così l'algebra di Lie di questi operatori.

Per un sistema isolato di particelle, d'altra parte,

$$\begin{aligned} [H, L_z] &= \left[\sum_i \frac{p_{x_i}^2 + p_{y_i}^2 + p_{z_i}^2}{2m_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij}(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|), \sum_i m_i (x_i p_{y_i} - y_i p_{x_i}) \right] = \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial y_i} x_i - \frac{\partial V}{\partial x_i} y_i - \frac{p_{x_i}}{m_i} p_{y_i} + \frac{p_{y_i}}{m_i} p_{x_i} \right) = 0. \end{aligned}$$

Dunque, come ci si aspettava, $\hat{H}\hat{L}_z = \hat{L}_z\hat{H}$.

6 MOTO DI UNA PARTICELLA CARICA

Nel 1873 Maxwell espone le leggi fondamentali che descrivono i fenomeni elettromagnetici. Per sorgenti situate nel vuoto, la forma differenziale delle equazioni è la seguente:

Legge di Gauss	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	(6.1a)
Legge di Ampere	$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j}$	(6.1b)
Legge di induzione di Faraday	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	(6.1d)
Assenza di monopoli magnetici	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	(6.1e)

Accanto ad esse vanno ricordate: l'equazione di continuità (contenuta implicitamente nelle equazioni di Maxwell (6.1))

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (6.2)$$

e l'espressione della forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{B}). \quad (6.3)$$

Dalle proprietà generali $\nabla \cdot \nabla \times = 0$ e $\nabla \times \nabla = 0$ applicate alle equazioni (6.2) si possono esprimere i campi elettrico e magnetico in termini di potenziali:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (6.4a)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (6.4b)$$

\mathbf{A} e ϕ essendo, rispettivamente, i potenziali vettore e scalare. È allora possibile riscrivere le equazioni di Maxwell sostituendo le (6.5) nelle equazioni non omogenee (6.1). Le definizioni dei potenziali non sono univoche: infatti, per ogni scelta della funzione $\psi(\mathbf{x}, t)$, anche i potenziali

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t}; \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi$$

soddisfano le (6.5). La funzione scalare ψ è detta *funzione di gauge*. $(\mathbf{A}, \phi) \rightarrow (\mathbf{A}', \phi')$ è detta *trasformazione di gauge*¹; \mathbf{E} e \mathbf{B} sono *gauge-invarianti*; l'arbitrarietà contenuta nella definizione dei potenziali può essere rimossa scegliendo una relazione aggiuntiva. Particolarmente importante risulta la scelta (nota come *gauge di Lorenz*)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (6.5)$$

il cui effetto è quello di disaccoppiare le equazioni per i potenziali in:²

$$\square \phi = \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad (6.6a)$$

$$\square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}. \quad (6.6b)$$

¹*gauge* è la traduzione inglese del vocabolo tedesco *Eich*, che significa *calibro*: la trasformazione di gauge permette di calibrare ad arbitrio, attraverso una scelta di ψ , i potenziali elettromagnetici, senza modificare i corrispondenti campi osservati fisicamente. H. Weyl, in un articolo del 1918, parla per la prima volta di *Eichinvarianz*. In realtà, già Lorenz (1867) aveva fatto uso di arbitrarietà nel potenziale.

²sottolineiamo che tali equazioni sono completamente equivalenti alle equazioni di Maxwell.

6.1 Descrizione lagrangiana di una carica in moto in un campo elettromagnetico

Per ciò che concerne il moto di una particella carica, tenendo conto che

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{e}_1 &= \dot{x}_2 \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) - \dot{x}_3 \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) + \dot{x}_1 \frac{\partial A_1}{\partial x_1} - \dot{x}_1 \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} (\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}}) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} (\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}}) \right] + \frac{\partial A_1}{\partial t}, \end{aligned}$$

si ha, per la componente lungo l'asse x_1 della forza di Lorentz, che

$$F_1 = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{e}_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1} (q\phi - q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}}) + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} (-q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}}) \right].$$

Dunque, se introduciamo il potenziale generalizzato

$$U = q\phi - q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}}, \quad \text{cosicché} \quad F_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_1} \right),$$

risulta possibile dare una descrizione lagrangiana del sistema tramite

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - q\phi + q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}}. \quad (6.7)$$

Esempio 6.1: moto di una carica in un campo elettrico costante.

In questo caso, $\mathbf{B} = 0$ e $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_1$ (E essendo costante). Scegliamo $\mathbf{A} = 0$; allora, essendo $\phi = -Ex_1$,

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + qEx_1.$$

Consideriamo l'effetto su \mathcal{L} di una traslazione infinitesima lungo l'asse x_1 , $\delta x_1 = \epsilon$:

$$\delta \mathcal{L} = \epsilon qE = \epsilon \frac{d}{dt} (qEt) \implies \quad \text{invarianza debole della lagrangiana.}$$

Per il teorema di Noether si conserva la funzione $G = m\dot{x}_1 - qEt$, da cui si deduce che la carica si muove con accelerazione costante $\ddot{x}_1 = \frac{qE}{m}$ nella direzione di \mathbf{E} . \odot

Esempio 6.2: moto di una carica in un campo magnetico costante: $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_3$, ($B \in \mathbb{R}$).

Poichè $\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3 = B\mathbf{e}_3$, una possibile scelta per i potenziali è

$$\phi = 0; \quad \mathbf{A} = \frac{B}{2} (-x_2\mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_2)$$

La corrispondente funzione di Lagrange $\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + q\frac{B}{2} (x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1x_2)$

è invariante per rotazioni attorno alla direzione del campo magnetico, come si può verificare direttamente:

$$\begin{cases} \delta x_1 = -x_2\delta\theta; \\ \delta x_2 = x_1\delta\theta; \\ \delta x_3 = 0; \end{cases} \implies \delta \mathcal{L} = m\dot{x}_i\delta\dot{x}_i + \frac{qB}{2} (\dot{x}_2\delta x_1 + x_1\delta\dot{x}_2 - \dot{x}_1\delta x_2 - x_2\delta\dot{x}_1) = 0.$$

Corrispondentemente, si conserva $G = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} x_2 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} x_1 = L_3 + \frac{qB}{2} (x_1^2 + x_2^2)$,

dove L_3 è la componente del momento angolare lungo x_3 . ⊙

In questi esempi sono state rimosse *ad hoc* le arbitrarietà dei potenziali sfruttando l'invarianza di gauge di \mathbf{E} e \mathbf{B} ; ma quale riflesso ha sulle equazioni del moto il fissare una gauge piuttosto che un'altra? Poiché il campo elettromagnetico è gauge-invariante, dobbiamo aspettarci che anche le equazioni del moto non mutino. Infatti, tenendo conto della (6.8), la funzione di Lagrange relativa ai potenziali

$$\phi' = \phi - \frac{\partial\psi}{\partial t}; \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$$

$$\text{è} \quad \widetilde{\mathcal{L}} = T - q \left(\phi - \frac{\partial\psi}{\partial t} \right) + q(\mathbf{A} + \nabla\psi) \cdot \dot{\mathbf{x}} = \mathcal{L} + q \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \nabla\psi \cdot \dot{\mathbf{x}} \right) = \mathcal{L} + q \frac{d\psi}{dt}.$$

È evidente che le due lagrangiane $\widetilde{\mathcal{L}}$ e \mathcal{L} sono (banalmente) equivalenti, nel senso che danno luogo alle medesime equazioni del moto. Non banalmente equivalenti sono invece le due lagrangiane del seguente

Esempio 6.3: *si studi una descrizione lagrangiana alternativa a quella dell'esempio (6.2).*

Non presenta alcuna difficoltà dimostrare che la funzione di Lagrange

$$\widetilde{\mathcal{L}} = m \left(\dot{x}_2 \ln \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} - \dot{x}_1 \arctan \frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2} \right) - qBx_1 \quad (6.8)$$

porta alle equazioni

$$m\ddot{x}_1 = qB\dot{x}_2; \quad m\ddot{x}_2 = -qB\dot{x}_1.$$

D'altra parte, anche la funzione di Lagrange che descrive una carica q in moto in un campo magnetico costante (vds. esempio 6.2) porta alle medesime equazioni. ⊙

6.2 Descrizione hamiltoniana di una carica in moto in un campo elettromagnetico

Osserviamo anzitutto che per un sistema a n gradi di libertà soggetto a vincoli fissi e a forze generalizzate derivabili da un potenziale generalizzato del tipo $U(q, \dot{q}) = -V(q) + a_i(q)\dot{q}_i$, si ha che

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + a_i \implies p_i \dot{q}_i = 2T + a_i \dot{q}_i \implies H = (2T + a_i \dot{q}_i) - (T - V + a_i \dot{q}_i) = T + V.$$

Nel caso della lagrangiana (6.8) avremo dunque

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i \implies \dot{x}_i = \frac{1}{m} (p_i - qA_i),$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2m} (p_i - qA_i)^2 + q\phi.} \quad (6.9)$$

H è proprio l'hamiltoniana di un punto materiale nel campo di potenziale $q\phi$, tranne che per il fatto che al posto di \mathbf{p} abbiamo $(\mathbf{p} - q\mathbf{A})$.

Esempio 6.4: *particella carica in moto in campo elettrico costante: simmetrie e leggi di conservazione.*

Con le scelte fatte nell'esempio 1.1, la funzione di Hamilton diviene

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - qEx_1.$$

Una costante del moto G deve soddisfare l'equazione

$$[G, H] + \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \quad \text{vale a dire} \quad \frac{\partial G}{\partial x_1} \frac{p_1}{m} + \frac{\partial G}{\partial p_1} qE + \frac{\partial G}{\partial t} = 0,$$

della quale una possibile soluzione è $G = p_1 - qEt$. La simmetria generata da G è, in base alla teoria sulle trasformazioni canoniche infinitesime,

$$\delta x_1 = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_1} = \epsilon; \quad \delta p_1 = 0.$$

Dunque la simmetria è una traslazione: si noti che la funzione generatrice G della traslazione non è la quantità di moto, che, infatti, non si conserva ma varia linearmente col tempo. In effetti, anche p_1 genera una traslazione (si ricordi l'arbitrarietà contenuta nelle funzioni generatrici di trasformazioni canoniche), ma in tal caso la trasformazione non è una simmetria dell'hamiltoniana: infatti, $\delta H = -\epsilon qE$. D'altra parte, G genera una simmetria per la nuova hamiltoniana K : $\Delta H = \frac{dG}{dt} = 0$. \ominus

Esempio 6.5: soluzione del moto per la particella dell'esempio precedente.

Vogliamo risolvere il problema mediante esponenziazione dell'operatore hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x} = -qE \frac{\partial}{\partial p} - \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Otteniamo allora

$$x(t) = e^{-t\hat{H}} x_0 = x_0 - t\hat{H}(x_0) + \frac{t^2}{2}\hat{H}^2(x_0) + \dots = x_0 + \frac{p_0}{m}t + \frac{t^2}{2} \frac{qE}{m},$$

in quanto i termini di ordine superiore al secondo sono tutti nulli; inoltre,

$$p(t) = e^{-t\hat{H}} p_0 = p_0 + qEt.$$

Il moto avviene, come già osservato, con accelerazione costante, di modulo $\frac{qE}{m}$. \ominus

Esempio 6.6: simmetrie per una particella carica in un campo magnetico costante.

Dall'es. 6.2, si ha che:
$$H = \frac{1}{2m} \left[\mathbf{p}^2 + \frac{q^2 B^2}{4} (x_1^2 + x_2^2) + qB(p_1 x_2 - x_1 p_2) \right]$$

Le rotazioni infinitesime attorno all'asse x_3 sono generate dalla funzione $G = x_1 p_2 - x_2 p_1$ (per mostrarlo, basta applicare la trasformazione di Legendre alla funzione G dell'esempio 6.2). Siccome si annulla la parentesi di Poisson

$$[G, H] = p_2 \frac{1}{m} \left(p_1 + \frac{eB}{2} x_2 \right) + x_1 \left[-\frac{eB}{2m} \left(p_1 + \frac{eB}{2} x_2 \right) \right] - p_1 \frac{1}{m} \left(p_2 - \frac{eB}{2} x_1 \right) - x_2 \frac{eB}{2m} \left(p_2 - \frac{eB}{2} x_1 \right),$$

G genera simmetrie per H . Questa particolare proprietà di invarianza di H sarà evidente anche nell'esempio che segue. \ominus

Esempio 6.7: soluzione del moto per la particella dell'esempio precedente.

Costruiamo la soluzione del moto mediante esponenziazione dell'operatore hamiltoniano

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{qB}{2m} \left(\frac{qB}{2} x_1 - p_2 \right) \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{qB}{2m} \left(\frac{qB}{2} x_2 + p_1 \right) \frac{\partial}{\partial p_2} \\ &\quad - \frac{1}{m} \left(p_1 + \frac{qB}{2} x_2 \right) \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{m} \left(p_2 - \frac{qB}{2} x_1 \right) \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{p_3}{m} \frac{\partial}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Per ottenere le soluzioni in forma compatta, osserviamo che:

$$\hat{H}(x_1^0) = -\frac{1}{m} \left(p_1^0 + \frac{qB}{2} x_2^0 \right) \Rightarrow \hat{H}^2(x_1^0) = -\frac{qB}{m^2} \left(\frac{qB}{2} x_1^0 - p_2^0 \right); \hat{H}^3(x_1^0) = \frac{q^2 B^2}{m^2} \frac{1}{m} \left(p_1^0 + \frac{qB}{2} x_2^0 \right)$$

$$\hat{H}(x_2^0) = -\frac{1}{m} \left(p_2^0 - \frac{qB}{2} x_1^0 \right) \Rightarrow \hat{H}^2(x_2^0) = -\frac{qB}{m^2} \left(\frac{qB}{2} x_2^0 + p_1^0 \right); \hat{H}^3(x_2^0) = \frac{q^2 B^2}{m^2} \frac{1}{m} \left(p_2^0 - \frac{qB}{2} x_1^0 \right).$$

A partire da questi calcoli, è facile completare il quadro dell'evoluzione nel tempo:

$$\hat{H}(x_3^0) = -\frac{p_3^0}{m} \Rightarrow \hat{H}^2(x_3^0) = 0; \quad \hat{H}(p_1^0) = \frac{qB}{2} \hat{H}(x_2^0); \quad \hat{H}(p_2^0) = -\frac{qB}{2} \hat{H}(x_1^0); \quad \hat{H}(p_3^0) = 0.$$

Infine, se costruiamo la serie per x_1 , nella quale poniamo $\omega = \frac{qB}{m}$ e aggiungiamo e sottraiamo il termine $\frac{1}{m\omega} \left(p_2^0 - \frac{qB}{2} x_1^0 \right)$, otteniamo:

$$x_1(t) = x_1^0 + \frac{1}{m\omega} \left(p_2^0 - \frac{qB}{2} x_1^0 \right) + \frac{1}{m\omega} \left(p_1^0 + \frac{qB}{2} x_2^0 \right) \left(\omega t - \omega^3 \frac{t^3}{3!} + \dots \right) - \frac{1}{m\omega} \left(p_2^0 - \frac{qB}{2} x_1^0 \right) \left(1 - \omega^2 \frac{t^2}{2!} + \dots \right)$$

La soluzione del moto è dunque data da:

$$x_1(t) - x_1^0 - \frac{1}{m\omega} \left(p_2^0 - \frac{qB}{2} x_1^0 \right) = \frac{1}{m\omega} \left(p_1^0 + \frac{qB}{2} x_2^0 \right) \sin \omega t - \frac{1}{m\omega} \left(p_2^0 - \frac{qB}{2} x_1^0 \right) \cos \omega t$$

$$x_2(t) - x_2^0 + \frac{1}{m\omega} \left(p_1^0 + \frac{qB}{2} x_2^0 \right) = \frac{1}{m\omega} \left(p_2^0 - \frac{qB}{2} x_1^0 \right) \sin \omega t + \frac{1}{m\omega} \left(p_1^0 + \frac{qB}{2} x_2^0 \right) \cos \omega t$$

$$x_3(t) = x_3^0 + \frac{p_3^0}{m} t.$$

La particella si muove su di un'elica: infatti, elevando al quadrato le prime due equazioni e sommando membro a membro, si ottiene l'equazione di una circonferenza nel piano $x_3 = \text{costante}$, di raggio

$$R = \frac{1}{m\omega} \sqrt{\left(p_1^0 + \frac{qB}{2} x_2^0 \right)^2 + \left(p_2^0 - \frac{qB}{2} x_1^0 \right)^2}.$$

⊙

Osservazioni:

1. $\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = \dot{x}_1^{0^2} + \dot{x}_2^{0^2}$: il moto è uniforme;
2. se poniamo il centro della circonferenza nell'origine, $x_1^2 + x_2^2 = x_1^{0^2} + x_2^{0^2}$ e, conseguentemente, si conserva L_3 : dunque, per ogni assegnata condizione iniziale, esiste un osservatore inerziale (e uno solo, nel sottogruppo delle traslazioni!) che vede un moto centrale: c'è infatti invarianza per rotazioni, non per traslazioni.
3. Anche il caso di carica in moto in campi elettrico e magnetico uniformi e mutuamente ortogonali (vale a dire $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_1$; $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_3$, con $E, B \in \mathbb{R}$) è ovviamente integrabile: si tratta semplicemente di ripercorrere buona parte dei calcoli svolti negli esempi 6.5 e 6.7 per ottenere, con un po' di pazienza:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= x_1^0 + \frac{1}{m\omega} \left(p_2^0 - \frac{qB}{2} x_1^0 \right) + \frac{qE}{m\omega^2} + \frac{1}{m\omega} \left(p_1^0 + \frac{qB}{2} x_2^0 \right) \sin \left(\omega t - \frac{qE}{m\omega^2} \right) - \frac{1}{m\omega} \left(p_2^0 - \frac{qB}{2} x_1^0 \right) \cos \omega t \\
x_2(t) &= x_2^0 - \frac{1}{m\omega} \left(p_1^0 + \frac{qB}{2} x_2^0 \right) + \frac{qE}{m\omega} t + \frac{1}{m\omega} \left(p_2^0 - \frac{qB}{2} x_1^0 \right) \sin \left(\omega t - \frac{qE}{m\omega^2} \right) + \frac{1}{m\omega} \left(p_1^0 + \frac{qB}{2} x_2^0 \right) \cos \omega t \\
x_3(t) &= x_3^0 + \frac{p_3^0}{m} t.
\end{aligned}$$

Le orbite sono un po' piú complicate: le proiezioni sui piani $x_3 = cost$. sono curve dette *trocoidi*.

Esempio 6.8: Si provi che se il campo magnetico in cui si muove una particella carica varia molto lentamente nel tempo, si conserva la funzione

$$G = \frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} - (t + \alpha)H$$

Si può facilmente verificare che la richiesta di variazione molto lenta (si parla in tal caso di *invarianza adiabatica*) è soddisfatta da $B = \frac{2k}{q(t + \alpha)}$. Per mantenere la gauge

$$\phi = 0; \quad A_1 = -\frac{B}{2}x_2; \quad A_2 = \frac{B}{2}x_1; \quad A_3 = 0,$$

dobbiamo ipotizzare l'esistenza di un campo elettrico $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$. In tal caso, avremo:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{k}{t + \alpha}(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1) \quad (6.10)$$

$$H = \frac{1}{2m} \left[\mathbf{p}^2 + \frac{k^2}{(t + \alpha)^2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{2k}{t + \alpha}(p_1x_2 - x_1p_2) \right] \quad (6.11)$$

dove

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{m} \left(p_1 + \frac{kx_2}{t + \alpha} \right) \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m} \left(p_2 - \frac{kx_1}{t + \alpha} \right) \end{cases} \iff \begin{cases} p_1 = m\dot{x}_1 - \frac{kx_2}{t + \alpha} \\ p_2 = m\dot{x}_2 + \frac{kx_1}{t + \alpha} \end{cases}$$

Le equazioni di Newton sono ora:

$$\ddot{x}_1 = \frac{k}{m(t + \alpha)} \left(2\dot{x}_2 - \frac{x_2}{t + \alpha} \right); \quad \ddot{x}_2 = -\frac{k}{m(t + \alpha)} \left(2\dot{x}_1 - \frac{x_1}{t + \alpha} \right)$$

La trasformazione generata da G è:

$$\frac{\delta x_1}{\epsilon} = \frac{x_1}{2} - \frac{(t + \alpha)}{m} \left(p_1 + \frac{kx_2}{t + \alpha} \right); \quad \frac{\delta x_2}{\epsilon} = \frac{x_2}{2} - \frac{(t + \alpha)}{m} \left(p_2 - \frac{kx_1}{t + \alpha} \right) \quad (6.12)$$

$$\frac{\delta p_1}{\epsilon} = -\frac{p_1}{2} - \frac{k}{m}p_2 + \frac{k^2x_1}{m(t + \alpha)}; \quad \frac{\delta p_2}{\epsilon} = -\frac{p_2}{2} + \frac{k}{m}p_1 + \frac{k^2x_2}{m(t + \alpha)} \quad (6.13)$$

Non è difficile verificare che, al primo ordine di approssimazione, si ottiene:

$$\begin{aligned}
K(Z) &= H'(Z) + \epsilon \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left[\mathbf{p}^2 + 2p_1\delta p_1 + 2p_2\delta p_2 + \frac{k^2}{(t + \alpha)^2}(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1\delta x_1 + 2x_2\delta x_2) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2k}{t + \alpha}(p_1x_2 - x_1p_2 + p_1\delta x_2 + x_2\delta p_1 - x_1\delta p_2 - p_2\delta x_1) \right] - \epsilon \left(H + (t + \alpha) \frac{\partial H}{\partial t} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Dunque G genera una simmetria per H e, dunque, si conserva durante il moto.

6.3 Esercizi relativi al moto di una carica in un campo magnetico uniforme

- ① Si parta dalla lagrangiana (6.9) per descrivere il moto in oggetto. Si determini tale moto sfruttando il metodo di riduzione di Routh.
- ② Si scriva l'hamiltoniana corrispondente alla lagrangiana (6.9) e si determini il moto della particella risolvendo l'equazione di Hamilton-Jacobi.
- ③ Si studi l'effetto della trasformazione infinitesima

$$\delta x_1 = -\epsilon \dot{x}_2; \quad \delta x_2 = \epsilon \dot{x}_1$$

sulla descrizione del moto della particella.

- ④ Si provi che il cosiddetto *vettore di Landau*

$$\mathbf{K} = qB(-x_2\mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_2) + m\dot{\mathbf{x}}$$

è costante durante il moto della particella, e si scrivano le simmetrie infinitesime da esso generate.

Risposte ai problemi

- ① È evidente che, essendo x_2 ciclica in

$$\mathcal{L} = m \left(\dot{x}_2 \ln \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} - \dot{x}_1 \arctan \frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2} \right) - qBx_1,$$

si conserva $\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2}$. Invertendo tale relazione si ha:

$$\dot{x}_2 = \sqrt{a^2 - \dot{x}_1^2}, \quad \text{dove, per brevità, abbiamo posto } a = e^{\frac{\alpha}{m}-1}.$$

La funzione di Routh risulta essere allora:

$$R = \mathcal{L} - \dot{x}_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} = -m\sqrt{a^2 - \dot{x}_1^2} - m\dot{x}_1 \arctan \frac{\dot{x}_1}{\sqrt{a^2 - \dot{x}_1^2}} - qBx_1.$$

Come sappiamo, a questo punto il sistema è ad un grado di libertà ed è lagrangiano, con R funzione di Lagrange. L'integrale di Jacobi è dato da

$$C = \dot{x}_1 \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} - R;$$

quindi: $\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} = -m \arctan \frac{\dot{x}_1}{\sqrt{a^2 - \dot{x}_1^2}} \implies C = m\sqrt{a^2 - \dot{x}_1^2} + qBx_1$, da cui si ricava:

$$\left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 = a^2 \left[1 - \left(\frac{C - qBx_1}{ma} \right)^2 \right] \implies t = \frac{1}{a} \int dx \left[1 - \left(\frac{C - qBx_1}{ma} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = -\frac{m}{qB} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

$$\text{Integrando, } \boxed{x_1 = \frac{C}{m\omega} - \frac{a}{\omega} \cos \omega t} \quad \left(\text{con } \omega = \frac{qB}{m} \right).$$

Per completare la soluzione, dobbiamo esprimere anche x_2 in funzione del tempo. Siccome $\dot{x}_1 = a \sin \omega t$, $R = -m\omega t \sin \omega t - C$; dunque,

$$x_2 = - \int \frac{\partial R}{\partial \alpha} dt = a \int \omega t \sin \omega t dt = \frac{a}{\omega} (\omega t \cos \omega t - \sin \omega t)$$

⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙

② Le trasformazioni di Legendre diretta e inversa sono, rispettivamente,

$$\begin{cases} p_1 = -m \arctan \frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2}; \\ p_2 = \frac{m}{2} \ln(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + m \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{e^{\frac{p_2}{m}}}{e} \sin \frac{p_1}{m} \\ \dot{x}_2 = \frac{e^{\frac{p_2}{m}}}{e} \cos \frac{p_1}{m}. \end{cases}$$

Conseguentemente, la funzione di Hamilton assume la forma

$$H = me^{\frac{p_2}{m}-1} \cos \frac{p_1}{m} + qBx_1, \quad (6.14)$$

e l'equazione di Hamilton-Jacobi si scrive come

$$me^{\frac{1}{m} \frac{\partial W_2}{\partial x_2} - 1} \cos \left(\frac{1}{m} \frac{\partial W_1}{\partial x_1} \right) + qBx_1 = E;$$

per essa cerchiamo una soluzione del tipo $S = W_1(x_1, E, \alpha) + W_2(x_2, E, \alpha) - Et$. L'equazione è evidentemente separabile:

$$e^{\frac{1}{m} \frac{\partial W_2}{\partial x_2} - 1} = \alpha; \quad \frac{\frac{E}{m} - \omega x_1}{\cos \left(\frac{1}{m} \frac{\partial W_1}{\partial x_1} \right)} = \alpha.$$

Abbiamo allora subito che

$$W_2 = m(1 + \ln \alpha)x_2; \quad \frac{\partial W_1}{\partial x_1} = m \arccos \left(\frac{E}{m\alpha} - \frac{\omega}{\alpha} x_1 \right) \implies$$

$$W_1 = -\frac{m\alpha}{\omega} \left[\left(\frac{E}{m\alpha} - \frac{\omega}{\alpha} x_1 \right) \arccos \left(\frac{E}{m\alpha} - \frac{\omega}{\alpha} x_1 \right) - \sqrt{1 - \left(\frac{E}{m\alpha} - \frac{\omega}{\alpha} x_1 \right)^2} \right]$$

Conseguentemente, le equazioni della trasformazione canonica generata da S forniscono:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial W_1}{\partial x_1} = m \arccos \left(\frac{E}{m\alpha} - \frac{\omega}{\alpha} x_1 \right) \\ p_2 &= \frac{\partial W_2}{\partial x_2} = m(1 + \ln \alpha) \\ \beta_1 &= \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial W_1}{\partial E} - t = -\frac{1}{\omega} \arccos \left(\frac{E}{m\alpha} - \frac{\omega}{\alpha} x_1 \right) - t \\ \beta_2 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{\partial W_1}{\partial \alpha} + \frac{m}{\alpha} x_2 = \frac{m}{\omega} \sin \frac{p_1}{m} + \frac{m}{\alpha} x_2. \end{aligned}$$

Seguendo la procedura usuale, valutiamo le precedenti equazioni all'istante iniziale $t = 0$ ed esprimiamo le coordinate canoniche (costanti) mediante le condizioni iniziali. Otteniamo:

$$\begin{aligned} E &= m \frac{e^{\frac{p_2^0}{m}}}{e} \cos \frac{p_1^0}{m} + m\omega x_1^0; & \alpha &= \frac{e^{\frac{p_2^0}{m}}}{e} \\ \beta_1 &= -\frac{p_1^0}{m\omega}; & \beta_2 &= \frac{m}{\omega} \sin \frac{p_1^0}{m} + mx_2^0 e^{-\frac{p_2^0}{m}}. \end{aligned}$$

Infine, esprimendo le variabili canoniche di partenza in funzione delle condizioni iniziali otteniamo le espressioni dell'evoluzione temporale:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= x_1^0 + \frac{p_2^0}{e\omega} \left(\cos \frac{p_1^0}{m} - \cos \left(\frac{p_1^0}{m} - \omega t \right) \right) \\x_2(t) &= x_2^0 + \frac{p_2^0}{e\omega} \left(\sin \frac{p_1^0}{m} - \sin \left(\frac{p_1^0}{m} - \omega t \right) \right) \\p_1(t) &= p_1^0 - m\omega t \\p_2(t) &= p_2^0.\end{aligned}$$

⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙

③ Le trasformazioni infinitesime delle x_i determinano quelle dei momenti coniugati (essendo nota l'hamiltoniana). Infatti, da un lato le trasformazioni di Legendre inverse

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{m} \left(p_1 + \frac{qB}{2} x_2 \right); \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{m} \left(p_2 - \frac{qB}{2} x_1 \right) \quad (6.15)$$

implicano sia

$$\begin{cases} \delta x_1 = -\frac{\epsilon}{m} \left(p_2 - \frac{qB}{2} x_1 \right); \\ \delta x_2 = \frac{\epsilon}{m} \left(p_1 + \frac{qB}{2} x_2 \right); \end{cases} \quad \text{che} \quad \begin{cases} \delta \dot{x}_1 = \frac{\delta p_1}{m} + \epsilon \frac{qB}{2m} \left(p_1 + \frac{qB}{2} x_2 \right); \\ \delta \dot{x}_2 = \frac{\delta p_2}{m} + \epsilon \frac{qB}{2m} \left(p_2 - \frac{qB}{2} x_1 \right); \end{cases}$$

e, d'altro canto, le equazioni di Hamilton comportano:

$$\begin{aligned}\delta \dot{x}_1 &= [\delta x_1, H] = \frac{\epsilon}{m} \left(\frac{\partial H}{\partial x_2} + \frac{qB}{2} \frac{\partial H}{\partial p_1} \right) = \epsilon \frac{qB}{m^2} \left(p_1 + \frac{qB}{2} x_2 \right); \\ \delta \dot{x}_2 &= [\delta x_2, H] = \frac{\epsilon}{m} \left(\frac{qB}{2} \frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial H}{\partial x_1} \right) = \epsilon \frac{qB}{m^2} \left(p_2 - \frac{qB}{2} x_1 \right),\end{aligned}$$

per cui, infine,

$$\delta p_1 = \epsilon \frac{qB}{2m} \left(p_1 + \frac{qB}{2} x_2 \right); \quad \delta p_2 = \epsilon \frac{qB}{2m} \left(p_2 - \frac{qB}{2} x_1 \right).$$

La trasformazione infinitesima che stiamo trattando ha due precise caratteristiche:

◇ non è canonica. Infatti, le equazioni per la funzione generatrice G

$$\frac{\partial G}{\partial p_1} = -\frac{1}{m} \left(p_2 - \frac{qB}{2} x_1 \right); \quad \frac{\partial G}{\partial p_2} = \frac{1}{m} \left(p_1 + \frac{qB}{2} x_2 \right);$$

non hanno soluzione in quanto derivando la prima rispetto a p_2 si ottiene $-\frac{1}{m}$, mentre la derivata della seconda rispetto a p_1 è uguale a $\frac{1}{m}$.

◇ è una simmetria per le equazioni del moto. Consideriamo, per fissare le idee, l'equazione di Hamilton

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{m} p_1 + \frac{qB}{2m} x_2;$$

se applichiamo ad essa la trasformazione in oggetto, otteniamo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{X}_1 - \delta\dot{x}_1 = \frac{1}{m}(P_1 - \delta p_1) + \frac{qB}{2m}(X_2 - \delta x_2) \implies \\ \dot{X}_1 &= \frac{P_1}{m} - \epsilon \frac{qB}{2m^2} \left(p_1 + \frac{qB}{2} x_2 \right) + \frac{qB}{2m} X_2 - \epsilon \frac{qB}{2m^2} \left(p_1 + \frac{qB}{2} x_2 \right) + \epsilon \frac{qB}{m^2} \left(p_1 + \frac{qB}{2} x_2 \right) \\ &\implies \dot{X}_1 = \frac{P_1}{m} + \frac{qB}{2m} X_2. \end{aligned}$$

Osservazione: si verifica facilmente che

$$\begin{aligned} \delta H &= -\frac{qB}{2m} \left(p_2 - \frac{qB}{2} x_1 \right) \delta x_1 + \frac{qB}{2m} \left(p_1 + \frac{qB}{2} x_2 \right) \delta x_2 + \frac{1}{m} \left(p_1 + \frac{qB}{2} x_2 \right) \delta p_1 + \frac{1}{m} \left(p_2 - \frac{qB}{2} x_1 \right) \delta p_2 \\ &= \epsilon \frac{qB}{m^2} \left[\left(p_2 - \frac{qB}{2} x_1 \right)^2 + \left(p_1 + \frac{qB}{2} x_2 \right)^2 \right] \neq 0. \end{aligned}$$

Non essendo canonica la trasformazione si perde dunque il legame simmetrie delle equazioni del moto \leftrightarrow simmetrie della funzione di Hamilton.

⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙

④ Applicando al vettore di Landau le trasformazioni di Legendre (6.16), si ha:

$$\mathbf{K} = \left(p_1 - \frac{qB}{2} x_2 \right) \mathbf{e}_1 + \left(p_2 + \frac{qB}{2} x_1 \right) \mathbf{e}_2 + p_3 \mathbf{e}_3.$$

È facile mostrare che

$$[K_1, H] = 0 = [K_2, H], \quad \text{dove } H = \frac{1}{2m} \left[\mathbf{p}^2 + \frac{q^2 B^2}{4} (x_1^2 + x_2^2) + qB(p_1 x_2 - x_1 p_2) \right]$$

È interessante a questo punto mostrare, come deve essere, che il vettore di Landau è costante anche durante il moto generato dalla funzione di Hamilton (6.15): le descrizioni del moto sono infatti, come abbiamo visto, equivalenti. C'è solo da prestare attenzione al fatto che dobbiamo qui applicare al vettore di Landau le trasformazioni di Legendre definite dalla funzione di Lagrange (6.9). Abbiamo allora:

$$K_1 = -qBx_2 - m \frac{e m}{e} \sin \frac{p_1}{m}; \quad K_2 = qBx_1 + m \frac{e m}{e} \cos \frac{p_1}{m}.$$

La parentesi di Poisson di tali funzioni con la funzione di Hamilton (6.15) è uguale a zero, come si può facilmente verificare.

Per ciò che concerne le simmetrie infinitesime generate dal vettore di Landau bisogna distinguere tra le due descrizioni: in entrambi i casi, come si può verificare, restano invariate le corrispettive funzioni di Hamilton ma le espressioni delle trasformazioni sono diverse, essendo diverse le funzioni generatrici. Per esempio, all'interno della prima trasformazione di Legendre, $K_1 = p_1 - \frac{qB}{2} x_2$ genera:

$$\delta x_1 = \epsilon \frac{\partial K_1}{\partial p_1} = \epsilon; \quad \delta x_2 = 0 \quad \delta p_1 = 0 \quad \delta p_2 = \epsilon \frac{qB}{2}.$$

Nella descrizione *alternativa*, $K_1 = -qBx_2 - m \frac{p_2}{e} \sin \frac{p_1}{m}$ genera

$$\delta x_1 = -\epsilon \frac{p_2}{e} \cos \frac{p_1}{m} \quad \delta x_2 = -\epsilon \frac{p_2}{e} \sin \frac{p_1}{m} \quad \delta p_1 = 0 \quad \delta p_2 = \epsilon qB.$$

7 Appendici

APPENDICE A: Reciprocità tra le parentesi di Poisson e di Lagrange.

Dalle definizioni,

$$\{A_\alpha, A_\beta\}[A_\beta, A_\gamma] = \frac{\partial z_i}{\partial A_\alpha} \gamma_{ij} \frac{\partial z_j}{\partial A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial z_k} \gamma_{kl} \frac{\partial A_\gamma}{\partial z_l} = \delta_{jk} \gamma_{ij} \gamma_{kl} \frac{\partial z_i}{\partial A_\alpha} \frac{\partial A_\gamma}{\partial z_l} = -\delta_{il} \frac{\partial z_i}{\partial A_\alpha} \frac{\partial A_\gamma}{\partial z_l} = -\delta_{\alpha\gamma},$$

dove si è tenuto conto che, per le proprietà della matrice Γ ,

$$\gamma_{ik} + \gamma_{ki} = 0; \quad \gamma_{ki} \gamma_{kl} = \delta_{il}.$$

APPENDICE B: Identità di Jacobi.

Essendo

$$[[E, F], G] = \frac{\partial}{\partial z_k} \left(\frac{\partial E}{\partial z_i} \gamma_{ij} \frac{\partial F}{\partial z_j} \right) \gamma_{kl} \frac{\partial G}{\partial z_l}$$

segue che: $[[E, F], G] + [[G, E], F] + [[F, G], E] =$

$$\begin{aligned} & \gamma_{ij} \gamma_{kl} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial z_k \partial z_i} \frac{\partial F}{\partial z_j} \frac{\partial G}{\partial z_l} + \frac{\partial E}{\partial z_i} \frac{\partial^2 F}{\partial z_k \partial z_j} \frac{\partial G}{\partial z_l} \right) + \gamma_{ji} \gamma_{lk} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial z_l \partial z_j} \frac{\partial E}{\partial z_i} \frac{\partial F}{\partial z_k} + \frac{\partial G}{\partial z_j} \frac{\partial^2 E}{\partial z_l \partial z_i} \frac{\partial F}{\partial z_k} \right) + \\ & \gamma_{kl} \gamma_{ji} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z_j \partial z_k} \frac{\partial G}{\partial z_l} \frac{\partial E}{\partial z_i} + \frac{\partial F}{\partial z_k} \frac{\partial^2 G}{\partial z_j \partial z_l} \frac{\partial E}{\partial z_i} \right) = (\gamma_{ij} \gamma_{kl} + \gamma_{lk} \gamma_{ij}) \frac{\partial^2 E}{\partial z_k \partial z_i} \frac{\partial F}{\partial z_j} \frac{\partial G}{\partial z_l} = 0 \end{aligned}$$

a causa dell'antisimmetria della matrice Γ ; si noti che questa è l'unica proprietà di tale matrice che interviene nella dimostrazione.

APPENDICE C: Proprietà delle parentesi di Lagrange.

Si può facilmente dimostrare che

- (i) $\{A_\alpha, A_\beta\} = -\{A_\beta, A_\alpha\}$ (antisimmetria)
- (ii) $\{\lambda A_\alpha, A_\beta\} = \frac{1}{\lambda} \{A_\alpha, A_\beta\}$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
- (iii) $\frac{\partial}{\partial A_\alpha} \{A_\beta, A_\gamma\} + \frac{\partial}{\partial A_\gamma} \{A_\alpha, A_\beta\} + \frac{\partial}{\partial A_\beta} \{A_\gamma, A_\alpha\} = 0;$

dunque vale la (iii) al posto dell'identità di Jacobi. Conseguentemente la parentesi di Lagrange non è una parentesi di Lie.

APPENDICE D: Invarianza canonica delle parentesi fondamentali.

Dal principio ampliato di Hamilton otteniamo:

$$P_i \dot{Q}_i - K = p_i \dot{q}_i - H + \frac{dF}{dt} = p_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \dot{Q}_k + p_i \frac{\partial q_i}{\partial P_k} \dot{P}_k + p_i \frac{\partial q_i}{\partial t} - H + \frac{\partial F}{\partial Q_k} \dot{Q}_k + \frac{\partial F}{\partial P_k} \dot{P}_k + \frac{\partial F}{\partial t},$$

da cui si ottengono le

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial Q_k} = P_k - p_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \\ \frac{\partial F}{\partial P_k} = -p_i \frac{\partial q_i}{\partial P_k} \end{cases} \quad (k = 1, n)$$

oltre alla

$$K = H - p_i \frac{\partial q_i}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Se la trasformazione è canonica la F soddisfa le condizioni di integrabilità delle equazioni sopra scritte:

$$\frac{\partial}{\partial Q_j} \left(P_k - p_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \right) = \frac{\partial}{\partial Q_k} \left(P_j - p_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \right) \quad (D1)$$

$$\frac{\partial}{\partial P_j} \left(p_i \frac{\partial q_i}{\partial P_k} \right) = \frac{\partial}{\partial P_k} \left(p_i \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \right) \quad (D2)$$

$$\frac{\partial}{\partial P_j} \left(P_k - p_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \right) = \frac{\partial}{\partial Q_k} \left(-p_i \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \right). \quad (D3)$$

Queste tre relazioni, rispettivamente, equivalgono all'invarianza canonica delle seguenti parentesi fondamentali di Lagrange

$$\{Q_k, Q_j\} = 0; \quad \{P_k, P_j\} = 0; \quad \{Q_k, P_j\} = \delta_{kj}.$$

A partire da quest'ultima, e tenendo conto della reciprocità tra le parentesi di Poisson e Lagrange mostrata nell'Appendice A, otteniamo che

$$\{Q_k, P_j\}[P_j, Q_i] = -\delta_{ki} \implies \delta_{kj}[P_j, Q_i] = -\delta_{ki};$$

inoltre,

$$\{Q_k, P_j\}[P_j, P_i] = -\delta_{ki} \implies [P_k, P_i] = -\delta_{ki}$$

dove si deve notare che gli indici k e i vanno presi diversi tra loro, poiché fin dall'inizio si assume $j \neq i$: il caso $[P_i, P_i] = 0$ è conseguenza banale della definizione di parentesi di Poisson. In definitiva, abbiamo provato che:

$$[Q_k, Q_j] = 0; \quad [P_k, P_j] = 0; \quad [Q_k, P_j] = \delta_{kj},$$

o, in notazione compatta (se $z \rightarrow Z$ è la trasformazione canonica),

$$[Z_k, Z_j] = \gamma_{kj}.$$

Le parentesi fondamentali di Poisson mantengono dunque lo stesso valore, anche quando vengono calcolate nelle nuove variabili canoniche: sono invarianti canonici.

APPENDICE E: Le trasformazioni di punto sono canoniche.

Le trasformazioni di punto $(q, \dot{q}) \rightarrow (Q, \dot{Q})$ sono caratterizzate dal fatto che $Q_k = Q_k(q, t)$, dunque:

$$\implies \dot{q}_k = \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial Q_k}{\partial t} \quad \text{da cui} \quad \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}. \quad (\text{E1})$$

Introducendo adesso la funzione $\mathcal{L}'(Q, \dot{Q}, t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ e ricordando la definizione di momento coniugato, si ha:

$$P_k = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{Q}_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_k} = p_j \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \quad (\text{E2})$$

e, inversamente,

$$p_j = \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} P_k. \quad (\text{E3})$$

Dunque abbiamo stabilito una trasformazione nello spazio delle fasi: mostriamo che per essa esiste sempre una funzione generatrice:

$$\begin{cases} p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} P_k \\ Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = Q_j(q, t). \end{cases} \quad (j = \overline{1, n})$$

Le seconde n equazioni indicano che

$$F_2 = Q_k P_k + \lambda(q, t);$$

sostituendo quest'ultima nelle prime n equazioni, si ha che

$$\frac{\partial \lambda}{\partial q_j} + \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} P_k = \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} P_k \implies F_2 = Q_k P_k.$$

Osservazione: le leggi di trasformazione (E1) e (E2) mettono in evidenza la diversa natura dei vettori, a seconda che essi appartengano al fibrato tangente o a quello cotangente allo spazio delle configurazioni. Infatti, esiste una classificazione dei vettori in base alle loro proprietà di trasformazione, che è bene ricordare qui: la (E1), che mostra come le *nuove* componenti del vettore velocità si ottengono moltiplicando le *vecchie* per lo jacobiano della trasformazione, stabilisce che la n -upla $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ rappresenta le componenti di un vettore **controvariante**. D'altra parte le (E2) sono le leggi con cui si trasformano le componenti di un vettore **covariante**. Dunque i momenti coniugati sono le componenti di un (co-)vettore e hanno un significato geometrico come le velocità generalizzate.

APPENDICE F: Le trasformazioni di scala.

Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e consideriamo le trasformazioni di scala

$$Q_i = \frac{q_i}{\alpha}; \quad P_i = \frac{p_i}{\beta} \quad (i = \overline{1, n}). \quad (\text{F1})$$

Come si trasformano le equazioni del moto e le parentesi di Poisson?

$$\dot{Q}_i = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{\alpha\beta} \frac{\partial H'}{\partial P_i} \quad \dot{P}_i = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{1}{\alpha\beta} \frac{\partial H'}{\partial Q_i}$$

(con $H(q, p, t) = H'(Q, P, t)$); esse sono equazioni di Hamilton a patto di scegliere come hamiltoniana

$$K = \frac{H}{\lambda} \quad \text{dove } \lambda = \alpha\beta.$$

Inoltre, dalle proprietà delle parentesi di Poisson, abbiamo che, se $z \rightarrow Z$ è la trasformazione di scala considerata,

$$[F, G]_z = \frac{\partial F}{\partial Z_i} [Z_i, Z_j] \frac{\partial G}{\partial Z_j} = \lambda [F, G]_Z.$$

Infine, la condizione simplettica (5.3) diviene:

$$\lambda \mathbf{J} \mathbf{\Gamma} \mathbf{J}^T = \mathbf{\Gamma}.$$

APPENDICE G: Le trasformazioni canoniche come gruppo a un parametro.

Vogliamo mostrare che se la funzione G generatrice di una trasformazione canonica infinitesima

$$\delta z_i = \delta \lambda \gamma_{ij} \frac{\partial G}{\partial z_j} \quad (\text{G1})$$

non dipende esplicitamente dal parametro λ , la trasformazione canonica $z_i = \psi_i(z^0, \lambda)$ gode della seguente proprietà

$$\psi_i(\psi(z^0, \lambda_1), \lambda_2) = \psi_i(z^0, \lambda_1 + \lambda_2). \quad (\text{G2})$$

La (G2), in sintesi, esprime la legge di composizione

$$\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1} = \psi_{\lambda_1 + \lambda_2}. \quad (\text{G3})$$

Per dimostrare la (G2), prima di tutto notiamo che essa è verificata per $\lambda_2 = 0$: infatti, $\psi(z^0, \lambda_1)$ è la condizione iniziale per ψ_{λ_2} e, ricordando che $\psi_i(z^0, 0) = z^0$, si ha conseguentemente che

$$\psi_i(\psi(z^0, \lambda_1), 0) = \psi_i(z^0, \lambda_1).$$

Differenziando separatamente ciascuno dei due termini della (G2) rispetto a λ_2 e ricordando la (6.6), otteniamo, rispettivamente,

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \lambda_2}(\psi(z^0, \lambda_1), \lambda_2) = \gamma_{ij} \frac{\partial G(\phi)}{\partial \phi_j} \Big|_{\phi_j = \psi_j(\psi(z^0, \lambda_1), \lambda_2)} \quad (\text{G4})$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \lambda_2}(z^0, \lambda_1 + \lambda_2) = \gamma_{ij} \frac{\partial G(\phi)}{\partial \phi_j} \Big|_{\phi_j = \psi_j(z^0, \lambda_1 + \lambda_2)} \quad (\text{G5})$$

che rappresentano due equazioni differenziali (con variabile indipendente λ_2) uguali in forma: dunque i due termini della (G2), essendo soluzioni della stessa equazione differenziale e coincidendo per la condizione iniziale $\lambda_2 = 0$ devono coincidere per ogni valore di λ_2 .³

Osservazione: se G dipendesse esplicitamente dal parametro, nella parte destra della (G4) avremmo la funzione $G(z^0, \lambda_2)$, mentre nella (G5) comparirebbe $G(z^0, \lambda_1 + \lambda_2)$, poichè in essa il parametro che fornisce l'avanzamento di z^0 appare sempre come $\lambda_1 + \lambda_2$. Ma in presenza di tale differente dipendenza esplicita di G dal parametro, i termini di destra delle (G5) e (G6) non avrebbero la stessa forma; le due equazioni non sarebbero uguali in forma.

³Questa implicazione è conseguenza del teorema di unicità della soluzione delle equazioni differenziali ordinarie.

APPENDICE H: Derivazione generale della condizione simplettica.

La richiesta più generale di canonicità di una trasformazione $z \rightarrow Z$ è che per ogni funzione di Hamilton H , esista una funzione K tale che

$$\dot{Z}_i = \frac{\partial Z_i}{\partial z_j} \gamma_{jk} \frac{\partial H}{\partial z_k} + \frac{\partial Z_i}{\partial t} = \gamma_{ij} \frac{\partial K}{\partial Z_j}. \quad (\text{H1})$$

Moltiplicando entrambi i membri della (H1) per γ_{il} , si ottengono le:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial Z_l} &= \gamma_{il} \gamma_{jk} \frac{\partial Z_i}{\partial z_j} \frac{\partial H}{\partial z_k} + \gamma_{il} \frac{\partial Z_i}{\partial t} \\ \frac{\partial K}{\partial Z_m} &= \gamma_{im} \gamma_{jk} \frac{\partial Z_i}{\partial z_j} \frac{\partial H}{\partial z_k} + \gamma_{im} \frac{\partial Z_i}{\partial t}, \end{aligned}$$

dove la seconda equazione è stata ottenuta sostituendo l'indice libero l con m . A questo punto imponiamo la condizione (necessaria) di integrabilità, ottenuta derivando le due equazioni, rispettivamente, per Z_m e per Z_l :

$$\frac{\partial z_r}{\partial Z_m} \frac{\partial}{\partial z_r} \left(\gamma_{il} \gamma_{jk} \frac{\partial Z_i}{\partial z_j} \frac{\partial H}{\partial z_k} + \gamma_{il} \frac{\partial Z_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial z_s}{\partial Z_l} \frac{\partial}{\partial z_s} \left(\gamma_{im} \gamma_{jk} \frac{\partial Z_i}{\partial z_j} \frac{\partial H}{\partial z_k} + \gamma_{im} \frac{\partial Z_i}{\partial t} \right);$$

moltiplicando entrambi i membri per $\frac{\partial Z_m}{\partial z_\alpha} \frac{\partial Z_l}{\partial z_\beta}$, si ha poi:

$$\frac{\partial Z_l}{\partial z_\beta} \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \left(\gamma_{il} \gamma_{jk} \frac{\partial Z_i}{\partial z_j} \frac{\partial H}{\partial z_k} + \gamma_{il} \frac{\partial Z_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial Z_l}{\partial z_\alpha} \frac{\partial}{\partial z_\beta} \left(\gamma_{im} \gamma_{jk} \frac{\partial Z_i}{\partial z_j} \frac{\partial H}{\partial z_k} + \gamma_{im} \frac{\partial Z_i}{\partial t} \right).$$

Una volta eseguiti le derivate e gli opportuni raccoglimenti, quest'ultima diviene:

$$\begin{aligned} \gamma_{jk} \left(\frac{\partial Z_l}{\partial z_\beta} \gamma_{il} \frac{\partial^2 Z_i}{\partial z_j \partial z_\alpha} - \frac{\partial Z_l}{\partial z_\alpha} \gamma_{il} \frac{\partial^2 Z_i}{\partial z_j \partial z_\beta} \right) \frac{\partial H}{\partial z_k} + \frac{\partial Z_l}{\partial z_\beta} \gamma_{il} \frac{\partial Z_i}{\partial z_j} \gamma_{jk} \frac{\partial^2 H}{\partial z_\alpha \partial z_k} - \frac{\partial Z_l}{\partial z_\alpha} \gamma_{il} \frac{\partial Z_i}{\partial z_j} \gamma_{jk} \frac{\partial^2 H}{\partial z_\beta \partial z_k} \\ + \frac{\partial Z_l}{\partial z_\beta} \gamma_{il} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial Z_i}{\partial z_\alpha} - \frac{\partial Z_l}{\partial z_\alpha} \gamma_{il} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial Z_i}{\partial z_\beta} = 0. \end{aligned}$$

Ancora, scambiando opportunamente tra loro gli indici ripetuti e riordinando i vari termini, si ha:

$$\begin{aligned} \gamma_{jk} \left(\frac{\partial Z_l}{\partial z_\beta} \gamma_{il} \frac{\partial^2 Z_i}{\partial z_j \partial z_\alpha} + \frac{\partial Z_i}{\partial z_\alpha} \gamma_{il} \frac{\partial^2 Z_l}{\partial z_j \partial z_\beta} \right) \frac{\partial H}{\partial z_k} + \frac{\partial Z_i}{\partial z_j} \gamma_{il} \frac{\partial Z_l}{\partial z_\beta} \gamma_{jk} \frac{\partial^2 H}{\partial z_\alpha \partial z_k} \\ - \frac{\partial Z_i}{\partial z_j} \gamma_{il} \frac{\partial Z_l}{\partial z_\alpha} \gamma_{jk} \frac{\partial^2 H}{\partial z_\beta \partial z_k} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Z_i}{\partial z_\alpha} \gamma_{il} \frac{\partial Z_l}{\partial z_\beta} \right) = 0. \end{aligned}$$

Indicando con $A_{\alpha\beta} = \{z_\alpha, z_\beta\}_z = \frac{\partial Z_i}{\partial z_\alpha} \gamma_{il} \frac{\partial Z_l}{\partial z_\beta}$ e con $H_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 H}{\partial z_\alpha \partial z_\beta}$, si perviene a:

$$[A_{\alpha\beta}, H] + A_{j\beta} \gamma_{jk} H_{\alpha k} - A_{j\alpha} \gamma_{jk} H_{\beta k} + \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial t} = 0. \quad (\text{H2})$$

La (H2) deve essere soddisfatta per ogni hamiltoniana: deve essere allora separatamente uguale a zero ogni termine che contiene un dato ordine di differenziazione di H :

$$0 = A_{j\beta} \gamma_{jk} H_{\alpha k} - A_{j\alpha} \gamma_{jk} H_{\beta k} \quad (\text{H3})$$

$$0 = [A_{\alpha\beta}, H] \quad (\text{H4})$$

$$0 = \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial t}. \quad (\text{H5})$$

La (H3), essendo valida per ogni H , implica che $\frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial z_i} = 0$. La (H5), poi, ci dice che le quantità $A_{\alpha\beta}$ non dipendono nemmeno dal tempo e dunque sono puramente numeriche. Se consideriamo la (H4), infine, osserviamo che una possibile scelta per gli elementi $A_{\alpha\beta}$ è:

$$A_{j\beta}\gamma_{jk} = c\delta_{\beta k}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Quindi abbiamo il seguente risultato finale: una trasformazione delle coordinate dello spazio delle fasi $z \rightarrow Z$ trasforma equazioni di Hamilton in equazioni di Hamilton se

$$\{z_\alpha, z_\beta\}_Z = c\gamma_{\alpha\beta}. \quad (\text{H6})$$

Nella (H6) sono comprese, oltre alle trasformazioni canoniche ($c = 1$), quelle di scambio ($c = -1$) e quelle di scala.

APPENDICE N: Il gruppo di Poincaré

Le matrici di Lorentz
$$\alpha = \begin{pmatrix} \Gamma & -\Gamma B & 0 & 0 \\ -\Gamma B & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{M1})$$

sono isometrie per la metrica di Lorentz, vale a dire lasciano invariata la metrica g dello spazio di Minkowski mediante una trasformazione di congruenza:

$$\alpha^T g \alpha = g. \quad (\text{M2})$$

Questa condizione ci assicura che le trasformazioni sono ortogonali, non perché la trasposta coincida con l'inversa (come avviene nella notazione complessa, dove la metrica è euclidea), ma in un senso più lato. Se, infatti, la condizione di ortogonalità richiede l'invarianza del modulo dei quadrivettori, si ha che:

$$\vec{R}' = \alpha \vec{R} \implies \vec{R}'^T g \vec{R}' = (\alpha \vec{R})^T g \alpha \vec{R} = \vec{R}^T g \vec{R}.$$

Le proprietà delle trasformazioni di Lorentz sono basate essenzialmente su due richieste: le equazioni di trasformazione $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$ tra due osservatori inerziali devono essere lineari; la velocità della luce dev'essere la stessa per entrambi. La questione è: le equazioni di trasformazione generate dalle matrici α sono le uniche, o le più generali, che soddisfano a tali richieste? La risposta è negativa e vedremo ora, molto schematicamente, in cosa consiste questa maggior generalità.

Il gruppo di Lorentz omogeneo

È evidente che ogni trasformazione ortogonale in \mathbb{R}^3 dà luogo ad una trasformazione ortogonale nello spazio di Minkowski: infatti, se $A \in O(3, \mathbb{R})$, basta considerare la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

La condizione (M2) è dunque soddisfatta, più in generale, da un gruppo di *rotazioni* Λ nello spazio tempo, caratterizzato da 6 parametri. Questo gruppo è detto di Lorentz omogeneo, ed è designato con il simbolo $O(3, 1)$ (i numeri si riferiscono alla segnatura della metrica). In realtà questo gruppo (che è un gruppo di Lie) è costituito da componenti, non connesse fra di loro, che vale la pena analizzare.

Prima di procedere, sottolineiamo due conseguenze della (M2): da un lato si ha che $(\det \Lambda)^2 = 1$ e, d'altro canto,

$$\Lambda_0^\mu g_{\mu\nu} \Lambda_0^\nu = g_{00} \implies \Lambda_{00}^2 - (\Lambda_{10}^2 + \Lambda_{20}^2 + \Lambda_{30}^2) = 1;$$

quest'ultima relazione comporta $|\Lambda_{00}| \geq 1$. In analogia con la distinzione tra rotazioni proprie (elementi di $SO(3, \mathbb{R})$) e riflessioni, qui operiamo una prima suddivisione tra trasformazioni di $O(3, 1)$ con determinante $+1$ e -1 ; una seconda suddivisione sarà individuata dal segno di Λ_{00} .

Il gruppo di Lorentz proprio

Tale gruppo è caratterizzato da $\det \Lambda = +1$: ma bisogna notare che anche la matrice -1 , che genera l'inversione $\vec{x} = -\vec{x}$, ha determinante $+1$. Dunque $SO(3, 1)$ è composto da rotazioni proprie in \mathbb{R}^3 , trasformazioni di Lorentz pure (i *trascinamenti* generati dalla (1)) e inversioni. Siccome vogliamo individuare gruppi a un parametro di trasformazioni, daremo ora una condizione per eliminare quelle trasformazioni che non sono connesse con continuità alla trasformazione identità.

Il (sotto-)gruppo di Lorentz proprio ortocrono

Questo sottogruppo è caratterizzato dalla condizione: $\det \Lambda = +1; \quad \Lambda_{00} \geq +1$,

ed è indicato con $SO(3, 1)^\uparrow$ (o, anche, con L_+^\uparrow); le trasformazioni da esso generate sono dette di Lorentz ristrette. I suoi elementi sono la composizione di rotazioni spaziali e trasformazioni di Lorentz pure. Si può mostrare che, oltre a trasformare lo spazio di Minkowski in sè stesso, essi conservano la disposizione delle regioni delimitate dal cono luce (quindi, trasformano vettori di tipo tempo in vettori di tipo tempo). A partire dalla trasformazione identità si può costruire qualsiasi elemento di $SO(3, 1)^\uparrow$ con continuità. Quest'ultima fondamentale proprietà permette di costruire (vds. Goldstein §7.4) un isomorfismo locale tra $SL(2, \mathbb{C})$ e $SO(3, 1)^\uparrow$ del tutto analogo a quello, studiato, tra $SU(2, \mathbb{C})$ e $SO(3, \mathbb{R})$; in questo caso, le matrici \mathbf{Q} non sono unitarie ma semplicemente unimodulari e permettono comunque, analogamente a quanto evidenziato nell'ambito della cinematica del corpo rigido, alcune utili semplificazioni nei calcoli.

Esempio:
$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

rappresenta l'usuale trascinamento, che comporta $\vec{x}' = \Lambda_\theta \vec{x}$; è facile vedere che $\Lambda_{\theta_1} \Lambda_{\theta_2} = \Lambda_{\theta_1 + \theta_2}$. Dunque non solo il prodotto di due trasformazioni ristrette è ancora ristretta (cosa che non è più vera per le altre componenti di $O(3, 1)^4$) ma sulla varietà $SO(3, 1)^\uparrow$ è possibile anche definire curve (sottogruppi a un parametro). Per ciò che riguarda l'algebra di Lie dei suoi generatori, si può mostrare che essi sono operatori differenziali lineari che lasciano invariata la metrica; al solito, la loro applicazione alle coordinate dello spazio tempo produce variazioni al primo ordine, la loro esponenziazione fornisce la trasformazione di Lorentz finita. Per esempio, per ciò che riguarda le trasformazioni di Lorentz pure, si ha:

$$\hat{A} = x^0 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^0} \implies e^{\theta \hat{A}} \vec{x} = \Lambda_\theta \vec{x}.$$

Il gruppo di Lorentz non omogeneo

Anche le traslazioni nello spazio di Minkowski

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}$$

⁴che non hanno dunque la struttura di gruppo.

sono trasformazioni che collegano due osservatori inerziali e conservano la velocità della luce. Per definirle sono necessari 4 parametri (le componenti a^μ). Dunque la più generale trasformazione dello spazio tempo in sé stesso che sia in accordo con i postulati di Einstein è

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \Lambda \vec{x} + \vec{a}$$

con $\Lambda \in O(3, 1)$. Tale gruppo di trasformazioni a 10 parametri è anche detto GRUPPO DI POINCARÉ.

La successione dei sottogruppi che abbiamo esaminato si può schematizzare come segue:

$$\Lambda \in SO(3, 1)^\dagger \subset SO(3, 1) \subset O(3, 1) \subset \text{gruppo di Poincaré.}$$

APPENDICE O: Formulazione covariante delle equazioni di Maxwell

Definiamo tensore di Faraday il tensore antisimmetrico di rango 2, definito sullo spazio di Minkowski, di componenti

$$F^{\mu\nu} = c \left(\frac{\partial \Phi^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \Phi^\mu}{\partial x_\nu} \right),$$

dove Φ^ν sono le componenti controvarianti del quadri-potenziale, x_μ quelle covarianti del vettore posizione nello spazio di Minkowski. Dunque, per esempio,

$$F^{0\nu} = c \left(\frac{\partial \Phi^\nu}{\partial x_0} - \frac{\partial \Phi^0}{\partial x_\nu} \right);$$

al variare di ν abbiamo tutta la prima riga della matrice 4x4 formata dalle componenti del tensore. Infatti, $F^{00} = 0$ e

$$F^{0i} = c \left(\frac{\partial A_i}{\partial ct} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\Phi}{c} \right) \right) = -E_i.$$

Si vede poi che

$$F^{13} = c \left(\frac{\partial \Phi^3}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi^1}{\partial x_3} \right) = c \left(-\frac{\partial A_3}{\partial x^1} + \frac{\partial A_1}{\partial x^3} \right) = cB_2,$$

cosicché, completando i calcoli si ha:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -cB_3 & cB_2 \\ E_2 & cB_3 & 0 & -cB_1 \\ E_3 & -cB_2 & cB_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per esercizio, si può provare che, definendo le componenti covarianti del tensore di Faraday come

$$F_{\mu\nu} = c \left(\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x^\nu} \right),$$

si ha che $F^{\mu\nu} = g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} F_{\sigma\lambda}$.

Forma covariante delle leggi di Gauss e Ampere

Proiettando la legge di Ampere sull'asse x_1 , si ha

$$\frac{\partial B_3}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^3} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_1}{\partial t} = \mu_0 j_1;$$

quest'espressione diviene, nella descrizione quadri-dimensionale,

$$\frac{\partial F^{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{31}}{\partial x^3} + \frac{\partial F^{01}}{\partial x^0} = c\mu_0 s^1.$$

D'altra parte, la legge di Gauss assume la forma:

$$\frac{\partial F^{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{20}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{30}}{\partial x^3} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{s^0}{c};$$

complessivamente le due leggi si sintetizzano in

$$\boxed{\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = c\mu_0 s^\nu}, \quad (M1)$$

dove si sottintende una somma su μ da 0 a 3.

Proposizione: Ciascun termine $\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu}$ (dove non è sottintesa alcuna somma) è la componente di un quadrivettore.

Dimostrazione: consideriamo la trasformazione

$$x'^\mu = \alpha^\mu_\nu x^\nu, \quad \text{dove} \quad (\alpha^\mu_\nu) = \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) \quad \text{è l'usuale matrice di Lorentz,}$$

rispetto alla quale un quadritensore si trasforma come segue:

$$F'^{\mu\nu} = \alpha^\mu_\sigma \alpha^\nu_\gamma F^{\sigma\gamma} \implies F^{\mu\nu} = (\alpha^\mu_\sigma)^{-1} (\alpha^\nu_\gamma)^{-1} F'^{\sigma\gamma}.$$

Conseguentemente, derivando quest'ultima rispetto a x^μ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial}{\partial x'^\rho} \left((\alpha^\mu_\sigma)^{-1} (\alpha^\nu_\gamma)^{-1} F'^{\sigma\gamma} \right) \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^\rho} \left(\alpha^\rho_\mu (\alpha^\mu_\sigma)^{-1} (\alpha^\nu_\gamma)^{-1} F'^{\sigma\gamma} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x'^\rho} \left((\alpha^\nu_\gamma)^{-1} F'^{\rho\gamma} \right) = (\alpha^\nu_\gamma)^{-1} \frac{\partial F'^{\rho\gamma}}{\partial x'^\rho} \end{aligned}$$

La proposizione ci garantisce allora la covarianza della (M1), in quanto questa è un'equazione che uguaglia due quadrivettori, e ogni trasformazione di Lorentz che trasforma la descrizione di un osservatore inerziale in quella di un altro osservatore inerziale manterrà la medesima forma vettoriale di tali leggi fisiche.

Forma covariante delle leggi di induzione e dell'assenza di monopolo magnetico

Seguendo il precedente approccio, abbiamo che la proiezione della legge di Faraday-Lenz sull'asse x^1

$$\frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3} + \frac{\partial B_1}{\partial t} = 0,$$

si riscrive come

$$\frac{\partial F^{03}}{\partial x_2} + \frac{\partial F^{20}}{\partial x_3} + \frac{\partial F^{32}}{\partial x_0} = 0.$$

Questa legge e la quarta equazione di Maxwell ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) si sintetizzano come

$$\boxed{\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F^{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F^{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0.} \quad (M2)$$

La (M2) è covariante nel senso che il termine di destra è un tensore nullo.

Indice

1	AMPLIAMENTO DELLO SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI	1
1.1	Fibrato tangente allo spazio delle configurazioni	1
1.2	Lifting della dinamica a spazi di supporto.	4
2	RIDUZIONE DI SISTEMI LAGRANGIANI.	7
2.1	Riduzione del problema dinamico in presenza di variabili cicliche	9
2.2	Riduzione del problema dinamico mediante l'equazione dell'energia	10
2.3	Riduzione del problema dei due corpi	12
2.3.1	Riduzione al moto di un corpo.	12
2.3.2	Riduzione alle quadrature mediante le costanti del moto.	13
2.3.3	Equazione differenziale per l'orbita.	13
2.4	Riduzione del problema di Keplero	14
2.4.1	Orbita ed evoluzione temporale.	14
2.4.2	Il vettore di Runge-Lenz.	15
3	AMPLIAMENTO ALLO SPAZIO DELLE FASI ED EQUAZIONI DI HAMILTON.	17
3.1	Le trasformazioni di Legendre	17
3.2	La funzione di Hamilton.	19
3.3	Notazione simplettica.	19
3.4	Equazioni di Hamilton e principi variazionali.	21
4	IL FORMALISMO HAMILTONIANO.	24
4.1	Parentesi di Poisson e di Lagrange.	24
4.2	Il teorema della parentesi di Poisson.	26
4.3	Dalle trasformazioni di punto alle trasformazioni canoniche.	29
4.4	La condizione simplettica.	31
4.5	Trasformazioni canoniche e canonoidi	33
5	GRUPPI A UN PARAMETRO DI TRASFORMAZIONI CANONICHE.	35
5.1	Trasformazioni canoniche infinitesime.	36
5.2	Dalle trasformazioni infinitesime a quelle finite.	39
5.3	La versione hamiltoniana del teorema di Noether.	43
5.4	Generatori del gruppo di Galileo.	45
6	MOTO DI UNA PARTICELLA CARICA	47
6.1	Descrizione lagrangiana di una carica in moto in un campo elettromagnetico	48
6.2	Descrizione hamiltoniana di una carica in moto in un campo elettromagnetico	49
6.3	Esercizi relativi al moto di una carica in un campo magnetico uniforme	53
7	Appendici	57