

# LEZIONE DI OTTICA APPLICATA N° 11

(3)

(15 NOV 2011) - Aula G6.

## Equazioni di Maxwell

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \\ \text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{B} = 0 \quad 3) \\ \text{div } \vec{D} = 4\pi \rho \quad 4) \end{array} \right.$$

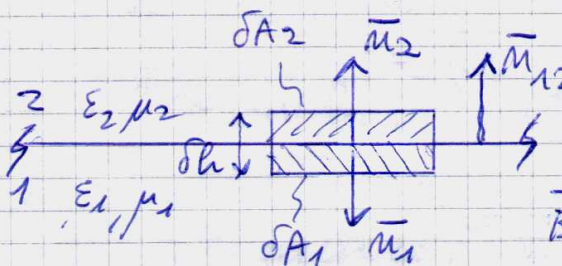
Differential equations

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad 9) \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad 10) \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \quad 11) \end{array} \right.$$

## "BOUNDARY CONDITIONS" SU UNA SUPERFICIE DI DISCONTINUITÀ

### INDUZIONE MAGNETICA

Teorema di Gauss:



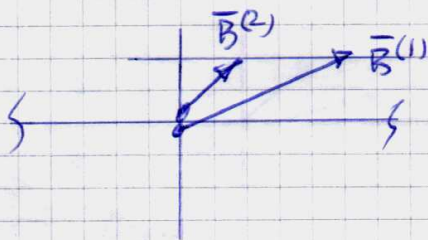
$$\int \text{div } \vec{B} dV = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$$

$$\vec{B}^{(1)} \cdot \vec{n}_1 \cdot \delta A_1 + \vec{B}^{(2)} \cdot \vec{n}_2 \cdot \delta A_2 + \text{lat.} = 0$$

$\delta h \rightarrow 0 \Rightarrow \text{cont. lat.} = 0; \delta A_1 = \delta A_2 = \delta A \Rightarrow$

$(\vec{B}^{(1)} \cdot \vec{n}_1 + \vec{B}^{(2)} \cdot \vec{n}_2) \delta A = 0; \vec{n}_{12} = \vec{n}_2; \vec{n}_{12} = -\vec{n}_1$

15)  $\vec{n}_{12} (\vec{B}^{(2)} - \vec{B}^{(1)}) = 0 \Rightarrow$  La componente normale del vettore induzione magnetica è continua attraverso la superficie di discontinuità.



## SPOSTAMENTO ELETTRICO

④

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} \cdot dV = \int_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = 4\pi \int_V \rho dV \quad (16)$$

Introduciamo la grandezza  $\hat{\rho}$  tale che

$$\lim_{\delta h \rightarrow 0} \int_V \rho dV = \int_S \hat{\rho} dA; \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\rho} \equiv \text{densità di carica} \\ \text{superficiale} \\ dA = \text{area elementare} \\ \text{dell'interfaccia} \end{array} \right.$$

$$\vec{D}^{(1)} \cdot \vec{n}_1 \delta A_1 + \vec{D}^{(2)} \cdot \vec{n}_2 \delta A_2 + \text{cont. lat} = 4\pi \hat{\rho} dA$$

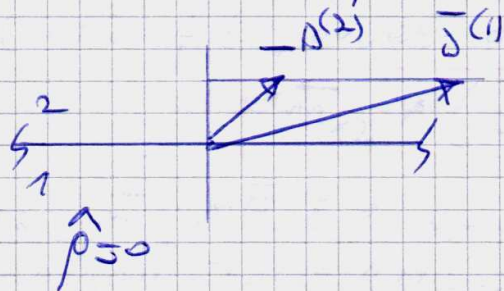
$$\lim_{\delta h \rightarrow 0} \delta h \rightarrow 0 \Rightarrow \text{cont. lat} = 0; \quad \delta A_1 = \delta A_2 = \delta A$$

$$\vec{n}_{12} = \vec{n}_2; \quad \vec{n}_{12} = -\vec{n}_1 \Rightarrow$$

$$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{D}^{(2)} - \vec{D}^{(1)}) = 4\pi \hat{\rho} \quad (18)$$

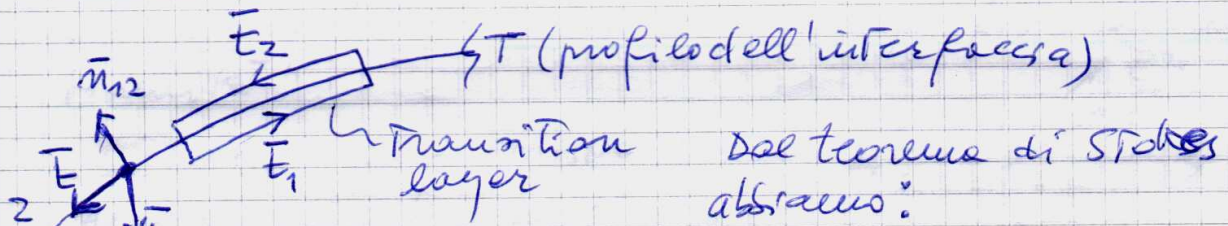
Ne consegue: "Le componenti normali del vettore spostamento elettrico  $\vec{D}$  cambiano all'interfaccia di una quantità pari a  $4\pi \hat{\rho}$ ". ovvero:

"Se nell'interfaccia non sono presenti cariche superficiali, allora la componente normale del vettore spostamento elettrico è continua nel passaggio attraverso la superficie di discontinuità".

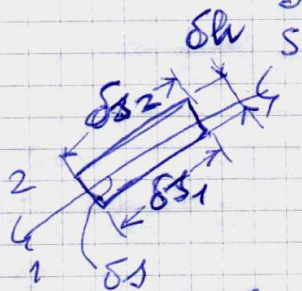


# VEETTORE CAMPO ELETTRICO

5



$$(20) \int_{\text{rot } \vec{E} \cdot \vec{b} \, dS} = \int_t \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{c} \int_s \frac{\partial \vec{B} \cdot \vec{b}}{\partial t} dS$$



$$\vec{E}^{(1)} \cdot \vec{t}_1 \cdot \delta S_1 + \vec{E}^{(2)} \cdot \vec{t}_2 \cdot \delta S_2 + \text{contr. laterali} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B} \cdot \vec{b}}{\partial t} \delta S \delta h \quad (21)$$

$$\lim \delta h \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{contributi laterali} = 0 \\ \text{secondo membro} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \delta S_1 = \delta S_2 = \delta S$$

$$\boxed{(\vec{E}^{(1)} \cdot \vec{t}_1 + \vec{E}^{(2)} \cdot \vec{t}_2) \delta S = 0} \quad (22) \begin{cases} \vec{t}_1 = -\vec{e} = -\vec{b} \wedge \vec{m}_{12} ; \\ \vec{t}_2 = \vec{e} = \vec{b} \wedge \vec{m}_{12} \end{cases}$$

Esendo:  $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \wedge \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{b}$  ;

$$\vec{E} \cdot \vec{E} = \vec{e} \cdot \vec{E} = \vec{b} \wedge \vec{m}_{12} \cdot \vec{E} = \vec{m}_{12} \wedge \vec{E} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{m}_{12} \wedge \vec{E}$$

in (22) diventa:  $\vec{b} \cdot (\vec{m}_{12} \wedge \vec{E}^{(2)} - \vec{m}_{12} \wedge \vec{E}^{(1)}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{b} \cdot [\vec{m}_{12} \wedge (\vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)})] = 0$  ma l'orientazione del triangolo, ovvero di  $\vec{b}$  è arbitraria, per cui:

$$\boxed{\vec{m}_{12} \wedge (\vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)}) = 0}$$

ma  $\vec{m}_{12} \wedge \vec{E}$  è la componente di  $\vec{E}$  sulla superficie di transizione (componente tangenziale), per cui:

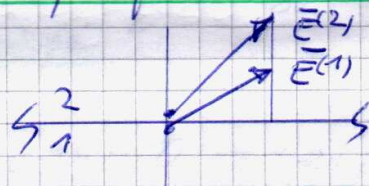
La componente tangenziale del vettore campo  $\vec{H}$  è continua attraverso la superficie di discontinuità.

### VEETTORE CAMPO MAGNETICO

Al posto della (21) abbiamo:

$$\vec{H}^{(1)} \cdot \vec{t}_1 \delta s_1 + \vec{H}^{(2)} \cdot \vec{t}_2 \delta s_2 + \text{contributi laterali} = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D} \cdot \vec{b}}{\partial t} \delta s \delta h + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \cdot \vec{b} \delta s \delta h$$



ma al posto della densità di corrente  $\vec{j}$  consideriamo la densità superficiale (all'interfaccia) di corrente  $\hat{j}$  in modo che:

$$\lim_{\delta h \rightarrow 0} \int_V \vec{j} dV = \int_S \hat{j} dA \quad (18)$$

Abbiamo quindi:

$$\vec{H}^{(1)} \cdot \vec{t}_1 \delta s_1 + \vec{H}^{(2)} \cdot \vec{t}_2 \delta s_2 + \text{contributi laterali} = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B} \cdot \vec{b}}{\partial t} \delta s \delta h + \frac{4\pi}{c} \hat{j} \cdot \vec{b} \delta s \quad (24)$$

Al limite per  $\delta h \rightarrow 0$  soppriamo i contributi laterali e il primo termine del 2° membro, inoltre  $\delta s_1 = \delta s_2 = \delta s$ :

$$(\vec{H}^{(1)} \cdot \vec{t}_1 + \vec{H}^{(2)} \cdot \vec{t}_2) \delta s = \frac{4\pi}{c} \hat{j} \cdot \vec{b} \delta s$$

$$\vec{E} \cdot (\vec{H}^{(2)} - \vec{H}^{(1)}) = \frac{4\pi}{c} \hat{j} \cdot \vec{b} \quad \text{ma } \vec{E} = \vec{b} \wedge \vec{n}_{12} \Rightarrow$$

$$\vec{b} \wedge \vec{n}_{12} \cdot (\vec{H}^{(2)} - \vec{H}^{(1)}) = \vec{n}_{12} \wedge (\vec{H}^{(2)} - \vec{H}^{(1)}) \cdot \vec{b} \Rightarrow$$

$$\vec{b} \cdot \vec{n}_{12} \wedge (\vec{H}^{(2)} - \vec{H}^{(1)}) = \frac{4\pi}{c} \hat{j} \cdot \vec{b}$$

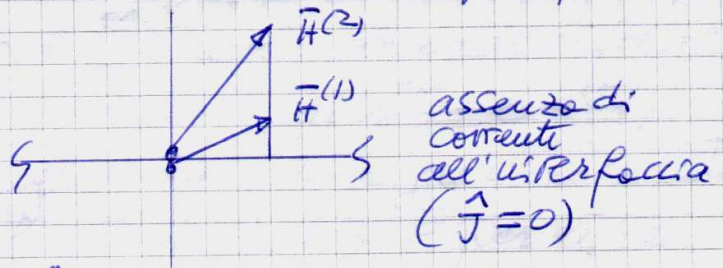
ma essendo la direzione di  $\vec{b}$  arbitraria, abbiamo:

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{H}^{(2)} - \vec{H}^{(1)}) = \frac{4\pi}{c} \hat{j} \quad (25) \quad \text{ovvero:}$$

La componente tangenziale del campo magnetico  $\vec{H}$  cambia della quantità  $\frac{4\pi}{c} \hat{j} \wedge \vec{n}_{12}$  nel passaggio attraverso la superficie di discontinuità.

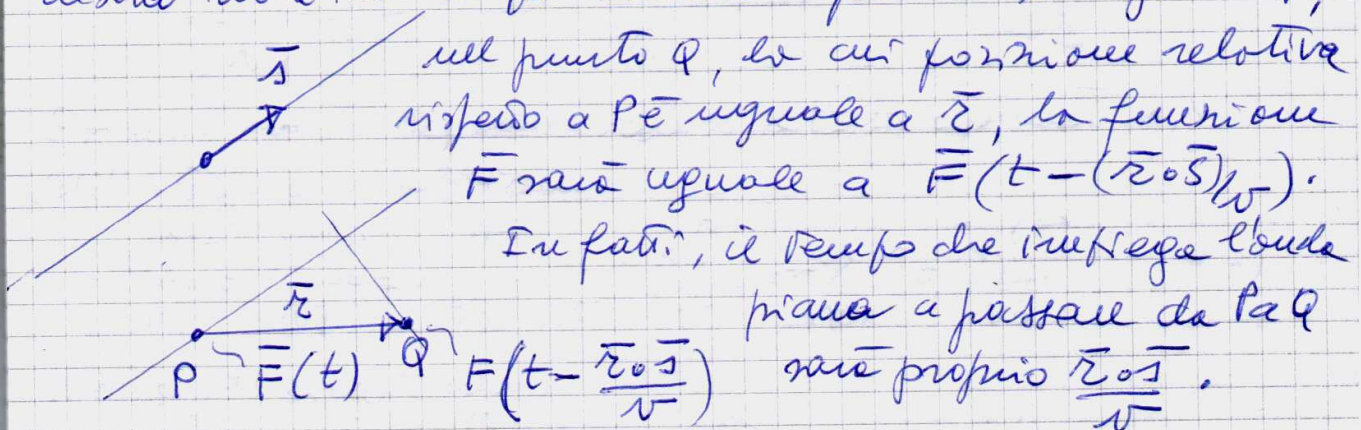
ovvero:

In assenza di una densità di corrente superficiale all'interfaccia, la componente tangenziale del campo magnetico si conserva attraverso la superficie di discontinuità.

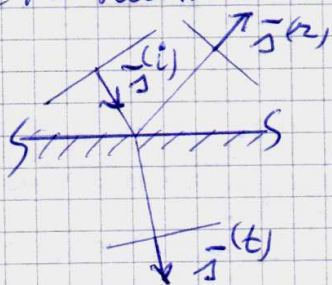


### RIFLESSIONE E RIFRAZIONE DI UN'ONDA PIANA

Un'onda piana che si propaga in una direzione specificata dal vettore  $\vec{s}$  è completamente determinata se si conosce l'andamento in funzione del tempo di una sua grandezza (ad esempio il campo elettrico) in un punto particolare. Se, ad esempio,  $\vec{F}(t)$  è la grandezza nota nel tempo dell'onda piana nel punto P,



Consideriamo ora un'onda piana incidente su una ⑧  
interfaccia piana che separa due mezzi omogenei e isotropi  
pi 1 e 2, caratterizzati da:  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ;  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ .  
All'interfaccia tra i due mezzi, la variazione  
temporale del campo incidente sia uguale alla variazione  
temporale del campo riflesso e trasmesso (in fase).  
Se  $\vec{s}^{(i)}$  denota il vettore unitario nella direzione di propa-  
gazione dell'onda piana incidente, le onde riflesse  
e trasmesse avranno vettori unitari  $\vec{s}^{(r)}$  e  $\vec{s}^{(t)}$ .



Uguagliando allora gli argomenti  
delle funzioni d'onda  $\bar{F}$  per le tre  
onde piane avremo:

$$(t - \vec{r} \cdot \vec{s}^{(i)}) / v_1 = (t - \vec{r} \cdot \vec{s}^{(r)}) / v_1 = (t - \vec{r} \cdot \vec{s}^{(t)}) / v_2 \quad (1)$$

Essendo:  $v_1 = c/n_1 = c/\sqrt{\epsilon_1}$ ;  $v_2 = c/n_2 = c/\sqrt{\epsilon_2}$

Se consideriamo solo i punti all'interfaccia, possiamo  
scrivere:  $\vec{r} = (x, y, 0)$  e quindi la (1) diventa:

$$\frac{x \cdot s_x^{(i)} + y \cdot s_y^{(i)}}{v_1} = \frac{x \cdot s_x^{(r)} + y \cdot s_y^{(r)}}{v_1} = \frac{x \cdot s_x^{(t)} + y \cdot s_y^{(t)}}{v_2} \quad (2)$$

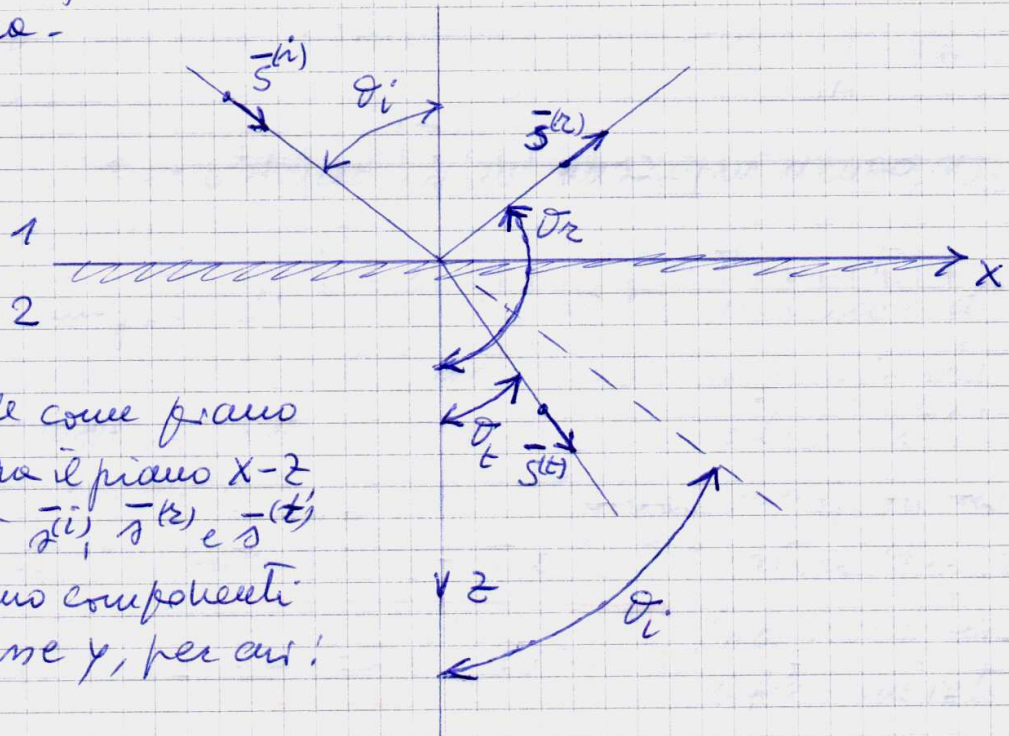
Essendo che la (2) deve valere x tutti i punti  $x, y$   
dell'interfaccia, abbiamo:

$$\frac{s_x^{(i)}}{v_1} = \frac{s_x^{(r)}}{v_1} = \frac{s_x^{(t)}}{v_2}; \quad \frac{s_y^{(i)}}{v_1} = \frac{s_y^{(r)}}{v_1} = \frac{s_y^{(t)}}{v_2} \quad (3)$$

Dalle (3) ricaviamo:

$$s_x^{(i)} / s_y^{(i)} = s_x^{(r)} / s_y^{(r)} = s_x^{(t)} / s_y^{(t)} \quad (3')$$

La (3') mostra che, se  $\vec{s}^{(i)}$  insieme alle normale  $\hat{n}$  all'interfaccia individuano il piano d'incidenza delle onde incidenti, allora anche i vettori  $\vec{s}^{(r)}$  e  $\vec{s}^{(t)}$  delle onde riflesse e trasmesse si trovano nel piano di incidenza.



Se si prende come piano d'incidenza il piano  $x-z$ , i vettori  $\vec{s}^{(i)}$ ,  $\vec{s}^{(r)}$  e  $\vec{s}^{(t)}$  non hanno componenti lungo l'asse  $y$ , per cui:

$$\left. \begin{aligned} s_x^{(i)} &= n_1 \sin \theta_i & ; & & s_y^{(i)} &= 0 & ; & & s_z^{(i)} &= \cos \theta_i \\ s_x^{(r)} &= n_1 \sin \theta_r & ; & & s_y^{(r)} &= 0 & ; & & s_z^{(r)} &= \cos \theta_r \\ s_x^{(t)} &= n_2 \sin \theta_t & ; & & s_y^{(t)} &= 0 & ; & & s_z^{(t)} &= \cos \theta_t \end{aligned} \right\} (4)$$

Alle (3) e (4) si ottiene:  $\frac{n_1 \sin \theta_i}{n_1} = \frac{n_1 \sin \theta_r}{n_1} = \frac{n_2 \sin \theta_t}{n_2}$  (6)

da cui:

$$\boxed{n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t} \quad \boxed{\theta_r = \pi - \theta_i} \quad (7)$$

(Legge della riflessione)

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} \cdot \frac{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}{c} = \frac{\sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12} \quad (8) \quad (10)$$

(Legge della rifrazione) (Legge di Snell).

Dalla (8) si ha:  $\sin \theta_t = \frac{\sin \theta_i}{n_{12}}$ , per cui, se si passa da

un mezzo meno denso ad un mezzo più denso,  $n_{12} > 1$  e quindi  $\sin \theta_t < \sin \theta_i$ , il che vuol dire che, per ogni valore dell'angolo d'incidenza si ha un valore di  $\theta_t$  reale! Se invece  $n_{12} < 1$  (passaggio da un mezzo più denso ad uno meno denso), allora si avranno valori reali di  $\theta_t$  solo per  $\sin \theta_i \leq n_{12}$ . Per valori maggiori di  $\theta_i$  si avrà la "riflessione totale". Il valore limite di  $\theta_i$  sarà:

$$\theta_L = \sin^{-1}(n_{12}) \quad (\text{per avere la riflessione totale})$$

## FORMULE DI FRESNEL

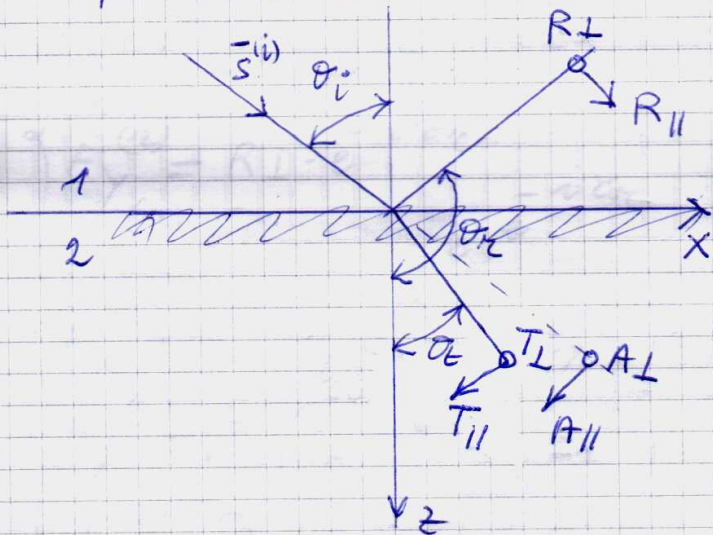
Fino ad ora abbiamo considerato come si trovano le direzioni di propagazione dell'onda riflessa e rifratta. Adesso consideriamo le ampiezze delle due onde in funzione dell'ampiezza dell'onda incidente.

Sia  $A$  l'ampiezza, costante, del vettore campo elettrico dell'onda incidente, la grandezza  $A$  è complessa e la sua fase è la parte costante dell'argomento della funzione d'onda - la parte variabile è data da:

$$\varphi_i = \omega \left( t - \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{s}(i)}{v_1} \right) = \omega \left( t - \frac{x \cdot \sin \theta_i + z \cdot \cos \theta_i}{v_1} \right) \quad (10)$$



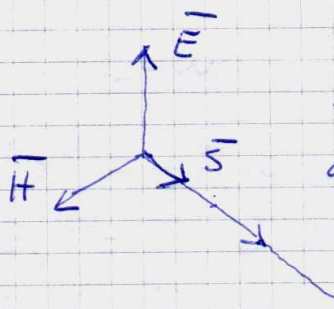
Risolviamo ora il campo elettrico ed il campo magnetico dell'onda piana in una componente parallela ( $\parallel$ ) e in una componente perpendicolare ( $\perp$ ) al piano d'incidenza.



Abbiamo per le componenti del campo elettrico incidente:

$$(11) \begin{cases} E_x^{(i)} = -A_{\parallel} \cos \theta_i e^{-i\tau_i} \\ E_y^{(i)} = A_{\perp} e^{-i\tau_i} \\ E_z^{(i)} = A_{\parallel} \sin \theta_i e^{-i\tau_i} \end{cases}$$

Per le componenti del campo magnetico incidente facciamo conto che:

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu}} \vec{s} \wedge \vec{E}$$


essendo  $\vec{s}$  il versore che indica la direzione di propagazione dell'onda -

Nel nostro caso abbiamo:  $\vec{H} = \sqrt{\epsilon_1} \vec{s} \wedge \vec{E}$  e quindi le componenti di  $\vec{H}$  diventano:

$$(13) \begin{cases} H_x^{(i)} = \sqrt{\epsilon_1} (s_y E_z^{(i)} - s_z E_y^{(i)}) = -A_{\perp} \cos \theta_i \sqrt{\epsilon_1} e^{-i\tau_i} \\ H_y^{(i)} = \sqrt{\epsilon_1} (s_z E_x^{(i)} - s_x E_z^{(i)}) = \dots = -A_{\parallel} \sqrt{\epsilon_1} e^{-i\tau_i} \\ H_z^{(i)} = \sqrt{\epsilon_1} (s_x E_y^{(i)} - s_y E_x^{(i)}) = A_{\perp} \sin \theta_i \sqrt{\epsilon_1} e^{-i\tau_i} \end{cases}$$

Indichiamo con T e R le ampiezze complesse, del campo elettrico delle onde trasmesse e riflesse.

Abbiamo per il campo riflesso:

(12)

$$\tau_r = \omega \left( t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{s}^{(r)}}{v_1} \right) = \omega \left( t - \frac{x \cdot \sin \theta_2 + z \cdot \cos \theta_2}{v_1} \right) \quad (17)$$

$$\begin{cases} E_x^{(r)} = -R_{\parallel} \cdot \cos \theta_2 \cdot e^{-i\tau_r} \\ E_y^{(r)} = R_{\perp} \cdot e^{-i\tau_r} \\ E_z^{(r)} = R_{\parallel} \cdot \sin \theta_2 \cdot e^{-i\tau_r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_x^{(r)} = \sqrt{\epsilon_1} \left( s_y \cdot E_z^{(r)} - s_z \cdot E_y^{(r)} \right) = -R_{\perp} \cdot \cos \theta_2 \cdot \sqrt{\epsilon_1} \cdot e^{-i\tau_r} \\ H_y^{(r)} = \sqrt{\epsilon_1} \left( s_z \cdot E_x^{(r)} - s_x \cdot E_z^{(r)} \right) = -R_{\parallel} \cdot \sqrt{\epsilon_1} \cdot e^{-i\tau_r} \\ H_z^{(r)} = \sqrt{\epsilon_1} \left( s_x \cdot E_y^{(r)} - s_y \cdot E_x^{(r)} \right) = R_{\perp} \cdot \sin \theta_2 \cdot \sqrt{\epsilon_1} \cdot e^{-i\tau_r} \end{cases} \quad (16)$$

e per il campo trasmesso:

$$\tau_t = \omega \left( t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{s}^{(t)}}{v_2} \right) = \omega \left( t - \frac{x \cdot \sin \theta_1 + z \cdot \cos \theta_1}{v_2} \right) \quad (15)$$

$$\begin{cases} E_x^{(t)} = -T_{\parallel} \cdot \cos \theta_1 \cdot e^{-i\tau_t} \\ E_y^{(t)} = T_{\perp} \cdot e^{-i\tau_t} \\ E_z^{(t)} = T_{\parallel} \cdot \sin \theta_1 \cdot e^{-i\tau_t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_x^{(t)} = \sqrt{\epsilon_2} \left( s_y \cdot E_z^{(t)} - s_z \cdot E_y^{(t)} \right) = -T_{\perp} \cdot \cos \theta_1 \cdot \sqrt{\epsilon_2} \cdot e^{-i\tau_t} \\ H_y^{(t)} = \sqrt{\epsilon_2} \left( s_z \cdot E_x^{(t)} - s_x \cdot E_z^{(t)} \right) = T_{\parallel} \cdot \sqrt{\epsilon_2} \cdot e^{-i\tau_t} \\ H_z^{(t)} = \sqrt{\epsilon_2} \left( s_x \cdot E_y^{(t)} - s_y \cdot E_x^{(t)} \right) = T_{\perp} \cdot \sin \theta_1 \cdot \sqrt{\epsilon_2} \cdot e^{-i\tau_t} \end{cases} \quad (14)$$

Se "boundary conditions" individuiamo che le componenti "tangenziali" di  $E$  e di  $H$  sono continue all'interfaccia, quindi abbiamo:

$$\begin{cases} E_x^{(1)} + E_x^{(2)} = E_x^{(t)} & ; & E_y^{(1)} + E_y^{(2)} = E_y^{(t)} \\ H_x^{(1)} + H_x^{(2)} = H_x^{(t)} & ; & H_y^{(1)} + H_y^{(2)} = H_y^{(t)} \end{cases} \quad (15)$$

Sostituendo nelle (15) le componenti trovate per il campo elettrico e magnetico incidente, riflesso e trasmesso, abbiamo:

$$-A_{11} \cdot \cos \theta_i e^{-i\tau_i} - R_{11} \cdot \cos \theta_r e^{-i\tau_r} = -T_{11} \cdot \cos \theta_t e^{-i\tau_t}$$

ma  $\cos \theta_r = \cos(\pi - \theta_i) = -\cos \theta_i$

inoltre all'interfaccia abbiamo che gli argomenti delle tre funzioni d'onda si eguagliano, quindi abbiamo

$$e^{-i\tau_i} = e^{-i\tau_r} = e^{-i\tau_t} \text{ e quindi otteniamo in fine:}$$

$$\begin{cases} \cos \theta_i (A_{11} - R_{11}) = \cos \theta_t \cdot T_{11} \\ A_{11} + R_{11} = T_{11} \\ \sqrt{\epsilon_1} \cdot \cos \theta_i (A_{11} - R_{11}) = \sqrt{\epsilon_2} \cdot \cos \theta_t \cdot T_{11} \\ \sqrt{\epsilon_1} (A_{11} + R_{11}) = \sqrt{\epsilon_2} \cdot T_{11} \end{cases} \quad (16)$$

Le eq. (16) si possono dividere in due gruppi, uno contenente solo le componenti parallele al piano d'incidenza del vettore campo elettrico e un altro contenente solo le componenti del campo elettrico perpendicolari al piano d'incidenza. Questo significa che:

"L'onda incidente parallela al piano d'incidenza è indipendente dall'onda incidente perpendicolare al piano d'incidenza!"

Ovvero: "L'incidenza dell'onda riflessa parallela (14) con come l'incidenza dell'onda trasmessa parallela ma solo funziona all'incidenza dell'onda incidente parallela; e la stessa cosa vale per le componenti perpendicolari". A partire dalle (18) e usando la relazione  $\sqrt{\epsilon} = n$ , otteniamo una prima forma delle formule di Fresnel:

$$\left. \begin{aligned} T_{||} &= \frac{2 n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \cdot A_{||} \\ T_{\perp} &= \frac{2 n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \cdot A_{\perp} \end{aligned} \right\} (20)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{||} &= \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \cdot A_{||} \\ R_{\perp} &= \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \cdot A_{\perp} \end{aligned} \right\} (21)$$

Utilizzando la legge della rifrazione  $\frac{n_1 \sin \theta_i}{n_2 \sin \theta_t} = \frac{n_2}{n_1}$  e (20) e (21) si trasformano con:

$$\left. \begin{aligned} T_{||} &= \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} \cdot A_{||} \\ T_{\perp} &= \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \cdot A_{\perp} \end{aligned} \right\} (20a)$$

15

$$\left. \begin{aligned} R_{||} &= \frac{\operatorname{tg}(\sigma_i - \sigma_t)}{\operatorname{tg}(\sigma_i + \sigma_t)} \cdot A_{||} \\ R_{\perp} &= - \frac{\sin(\sigma_i - \sigma_t)}{\sin(\sigma_i + \sigma_t)} \cdot A_{\perp} \end{aligned} \right\} (21a)$$