



Università degli Studi di Ferrara
Facoltà di Scienze MM FF NN
Corso di Laurea in «*Scienze e Tecnologie per i Beni Culturali*»

AA 2010-2011

INFORMATICA

Prof. Giorgio Poletti
giorgio.poletti@unife.it

I quattro problemi fondamentali

“Io esorto a studiare matematica pur chi si accinga a divenire avvocato o economista, filosofo o letterato; perché io credo e spero che non gli sarà inutile saper bene ragionare e chiaramente esporre.”

(Alessandro Padoa)



I quattro problemi fondamentali

AMBITI DI APPLICAZIONE



I quattro problemi fondamentali

IL PROBLEMA DEL COMMESSE VIAGGIATORE (TSP : TRAVELLING SALESMAN PROBLEM)

IL COMMESSE VIAGGIATORE

Problemi di cammino minimo
(Problemi *SP* – *Short Path*)

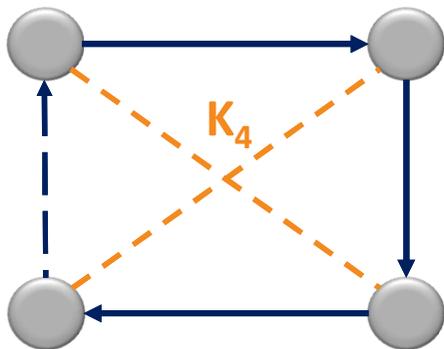
FLUSSI DI MERCI

distribuzione merci tra magazzini, clienti e fornitori

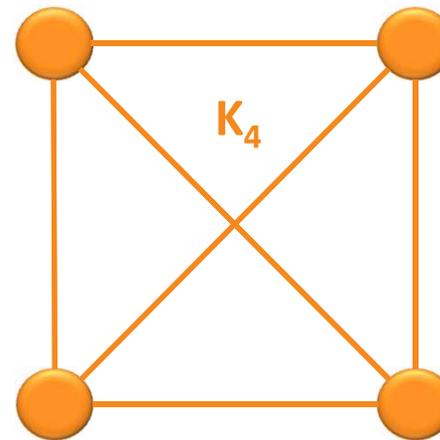
MINIMIZZAZIONE DI PERCORSI

percorso più breve tra due città

Dato un **grafo completo** con n nodi si indica K_n



GRAFO HAMILTONIANO se ammette
un CAMMINO HAMILTONIANO.



CAMMINO HAMILTONIANO è cammino, in un grafo semplice, che passa (visita) una ed una sola volta ogni nodo. Se il nodo di partenza e il nodo di arrivo coincidono **CICLO HAMILTONIANO**.

I quattro problemi fondamentali

IL PROBLEMA DEL COMMESSE VIAGGIATORE (TSP : TRAVELLING SALESMAN PROBLEM)

IL COMMESSE VIAGGIATORE

Problemi di cammino minimo
(Problemi *SP* – *Short Path*)

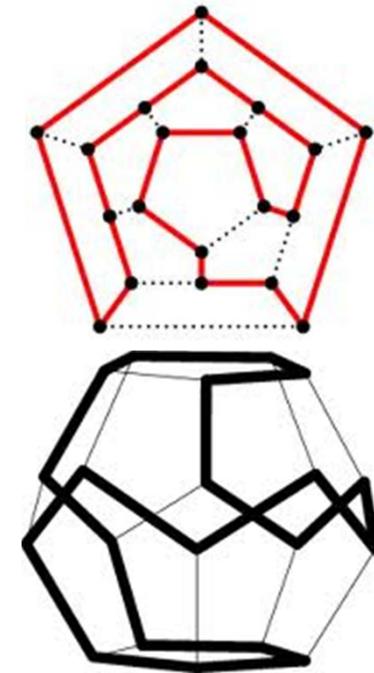
FLUSSI DI MERCI

distribuzione merci tra magazzini, clienti e fornitori

MINIMIZZAZIONE DI PERCORSI

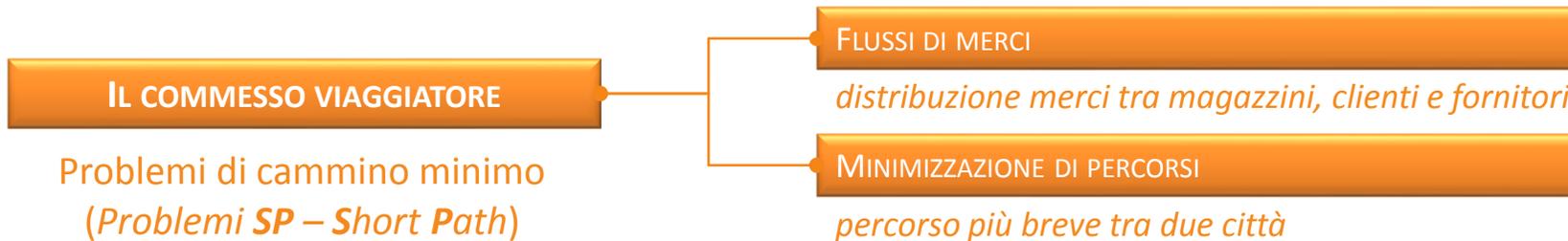
percorso più breve tra due città

WILLIAM ROWAN HAMILTON (1802-1865), scienziato irlandese, inventò il gioco da tavola detto *puzzle di hamilton* (ICOSIAN GAME)

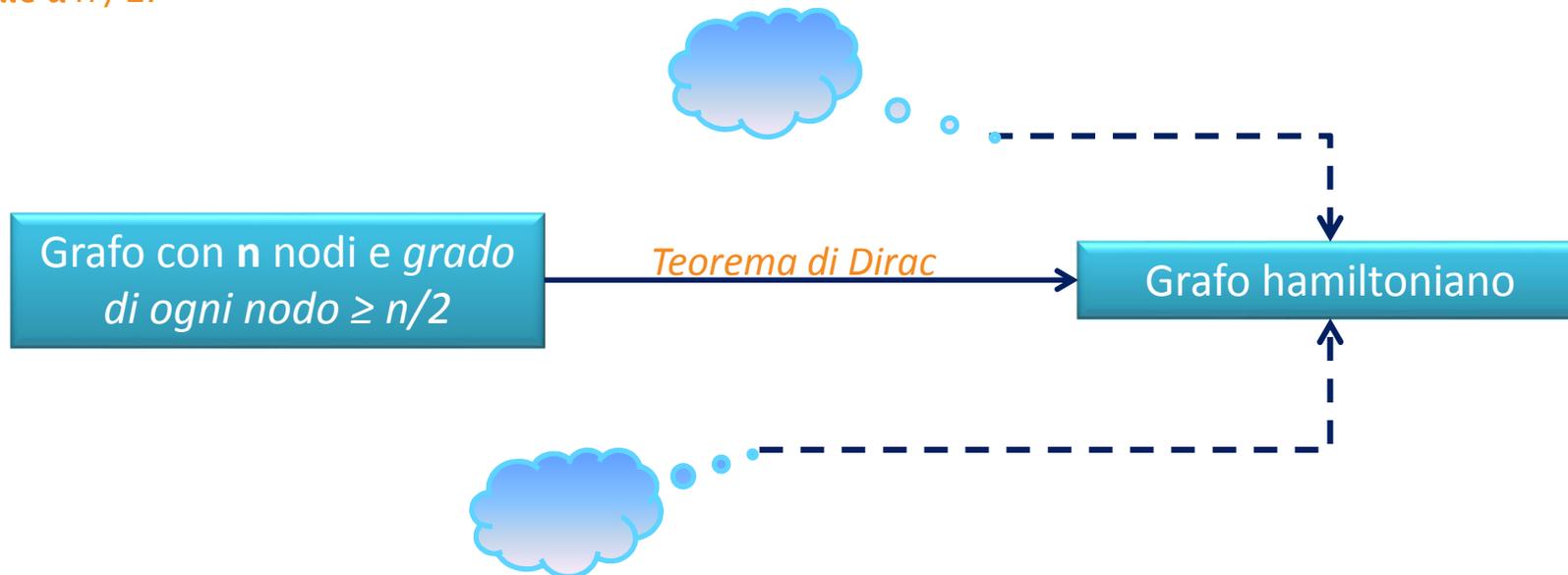


I quattro problemi fondamentali

IL PROBLEMA DEL COMMESSE VIAGGIATORE (TSP : TRAVELLING SALESMAN PROBLEM)

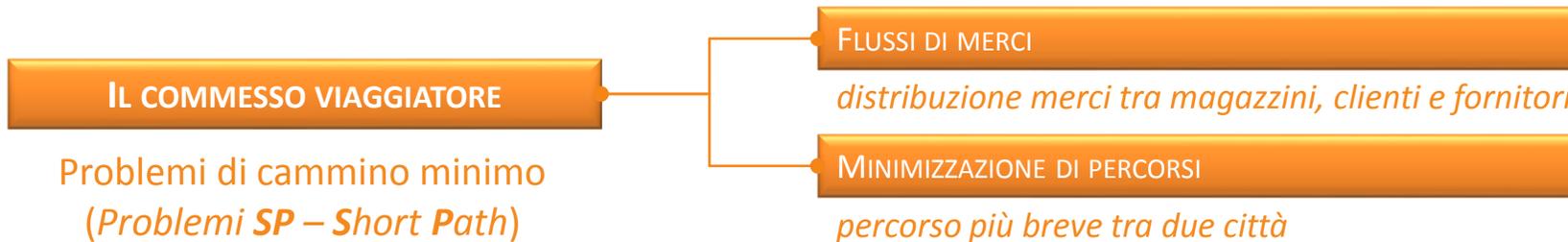


Il **TEOREMA DI DIRAC** definisce una condizione sufficiente (ma non necessaria) affinché un grafo con n vertici sia **hamiltoniano**: il grado di ogni vertice (cioè il numero di spigoli adiacenti) deve essere maggiore o uguale a $n/2$.



I quattro problemi fondamentali

IL PROBLEMA DEL COMMESSE VIAGGIATORE (TSP : TRAVELLING SALESMAN PROBLEM)



«Dato un grafo pesato qual è il cammino che unisce 2 nodi (vertici) dati che è minimo rispetto al valore della somma dei costi (pesi) associati a ciascun arco?»

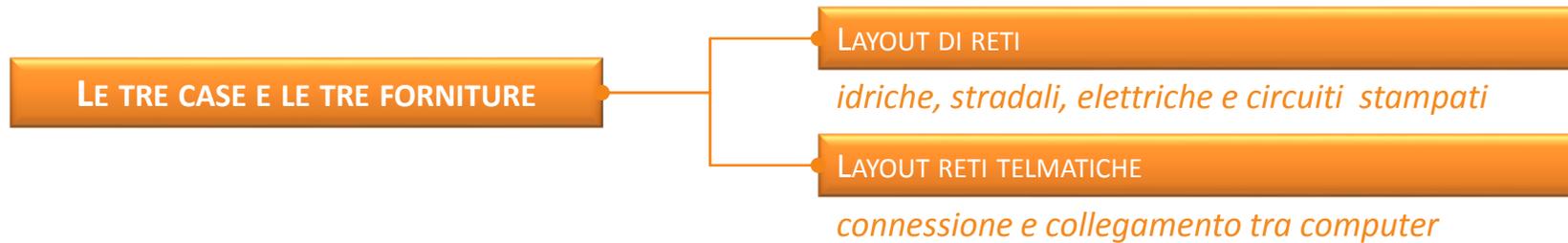


Curiosità: i **6 GRADI DI SEPARAZIONE (TEORIA DEL PICCOLO MONDO)**, concetto introdotto dallo scrittore ungherese Frigyes Karinthy in *Catene*, racconto del 1929.

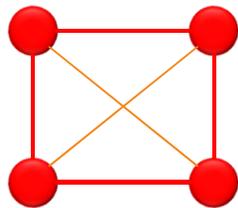
2008: analisi su 30 miliardi di sessioni chat (Messenger) su 180.000.000 di persone, nel 78% dei casi la distanza media è 6,6 (max 29).

I quattro problemi fondamentali

IL PROBLEMA DELLE TRE CASE E DELLE TRE FORNITURE

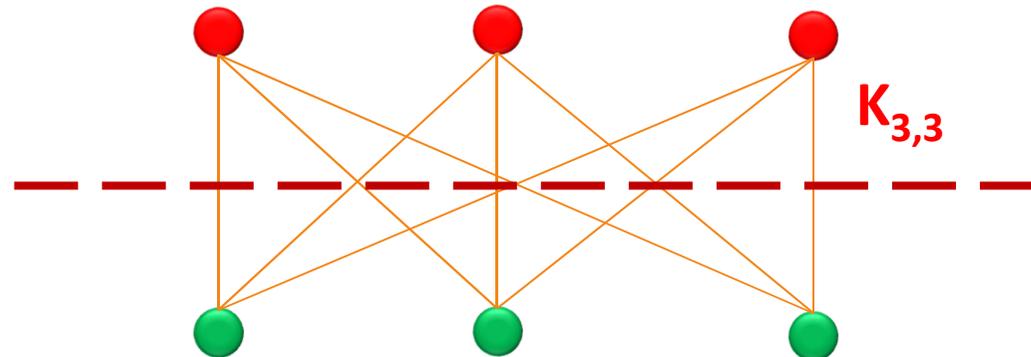


Un grafo completo con n nodi (K_n) è un grafo regolare di grado $n-1$.



K_4 regolare di grado 3

Grafo Bipartito e Completo con 3+3 nodi



$K_{3,3}$

I quattro problemi fondamentali

IL PROBLEMA DELLE TRE CASE E DELLE TRE FORNITURE

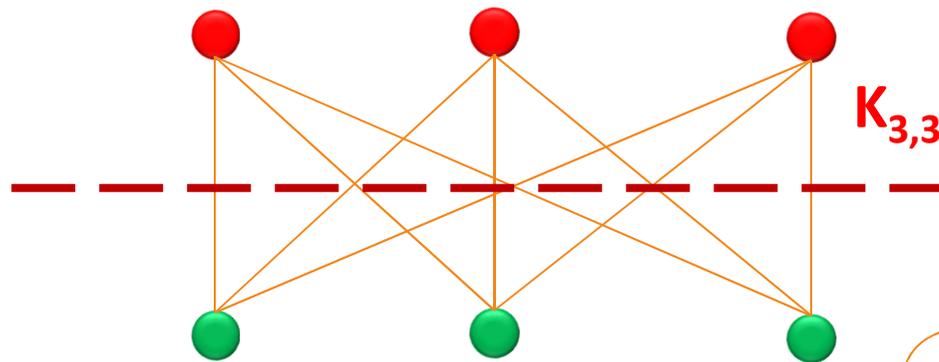
LE TRE CASE E LE TRE FORNITURE

LAYOUT DI RETI

idriche, stradali, elettriche e circuiti stampati

LAYOUT RETI TELMATICHE

connessione e collegamento tra computer

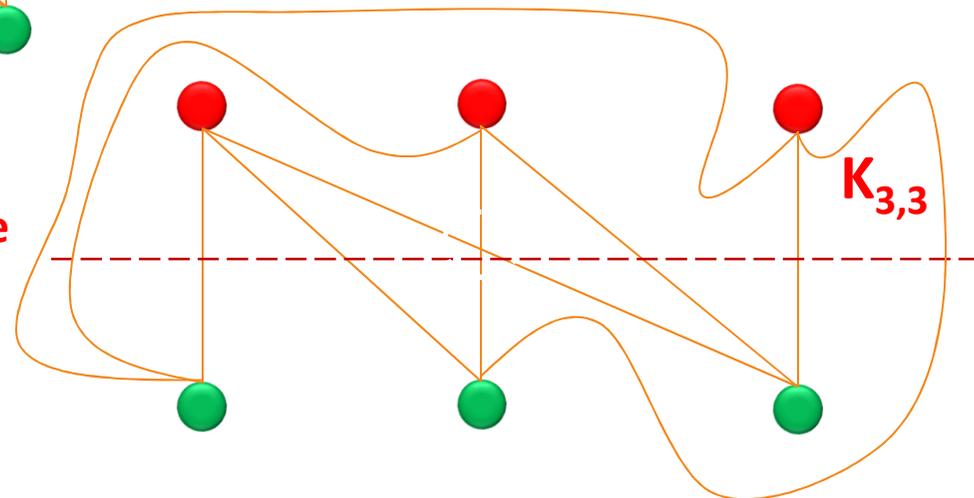


$K_{3,3}$

Schema del problema delle tre case e delle tre forniture
(grafo bipartito e completo con 3+3 nodi)

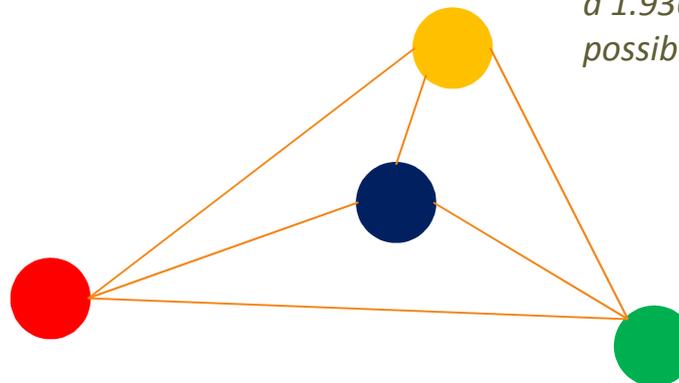
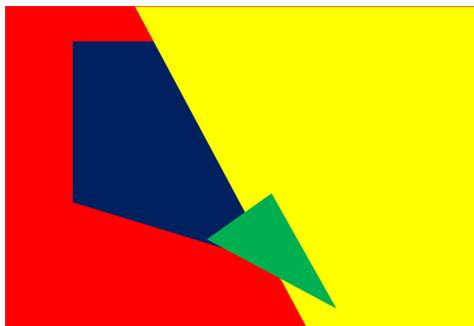
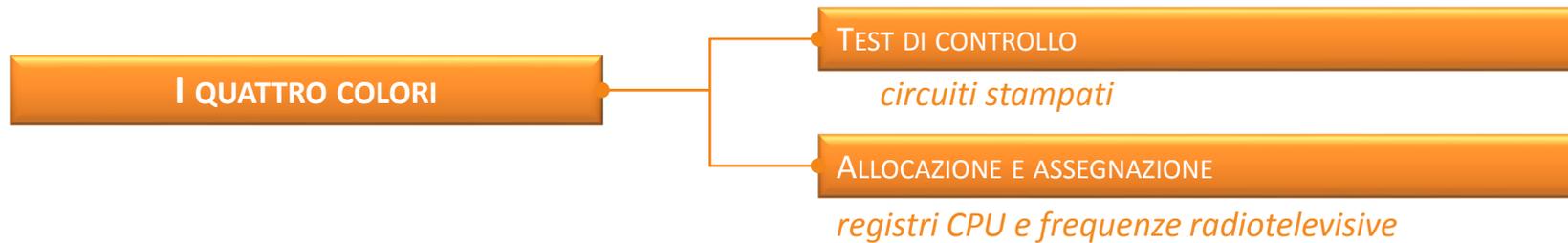
Schema di possibile soluzione

Il **TEOREMA DI KURATOWSKI** ci permette di dichiarare l'impossibilità di generare **0** incroci e indicare **1** è il numero minimo.



I quattro problemi fondamentali

IL PROBLEMA DEI QUATTRO COLORI



Riduzione delle infinite mappe a 1.936 e poi 1.476 configurazioni possibili verificate da computer

I quattro problemi fondamentali

PROBLEMI **SP** (**SHORT PATH**): ALGORITMO DI DIJKSTRA

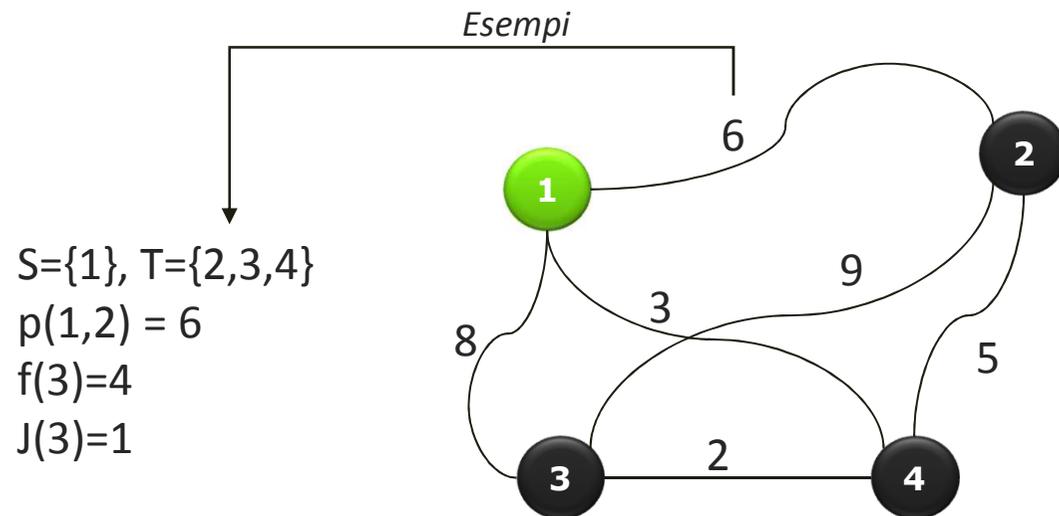
Esempio la scelta della sequenza degli esami da sostenere all'università...

Contesti di applicazione: ottimizzare la realizzazione della rete idrica, collegamento, meno dispendioso, in termini di potenza dissipata, per realizzare un circuito elettrico.

Trovare il percorso minimo tra due punti considerati rispettivamente partenza e arrivo... il più breve, il più rapido, il più economico...

PREMESSE e NOTAZIONI

- **GRAFO** con n nodi distinti
- **NODI** numerati (1 partenza, n arrivo)
- **ARCHI** "pesati" e indicato $p(j,k)$
- etichetta $f(i)$ peso del cammino per giungere al nodo i
- etichetta $J(i)$ nodo che precede il **nodo** i nel cammino minimo
- **S** insieme dei nodi etichettati
- **T** l'insieme dei nodi non etichettati



I quattro problemi fondamentali

PROBLEMI **SP** (**SHORT PATH**): ALGORITMO DI DIJKSTRA

Descrizione Algoritmica

(*G* grafo di riferimento)

Inizializzazione

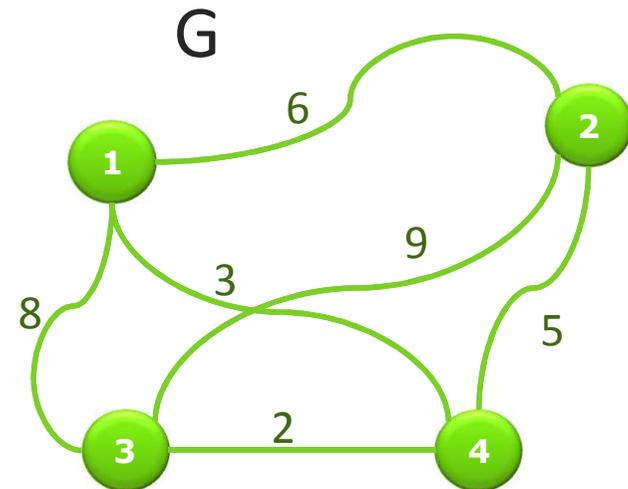
- $S=\{1\}$, $T=\{2,3,4\}$, $f(1)=0$, $J(1)=0$
- $f(i)=p(1,i)$, $J(i)=1$ per tutti i nodi adiacenti a 1
- $f(i) = \infty$ (infinito) per tutti gli altri nodi

Assegnazione di etichetta permanente

- Se $f(i) = \infty$, per ogni i in $T \Rightarrow$ STOP
- Si trova j per cui $f(j) = \min f(i)$ di tutti gli i in T
- $T=T-\{j\}$ e $S=S\cup\{j\}$
- Se $T=\emptyset$ STOP

Assegnazione di etichetta provvisoria

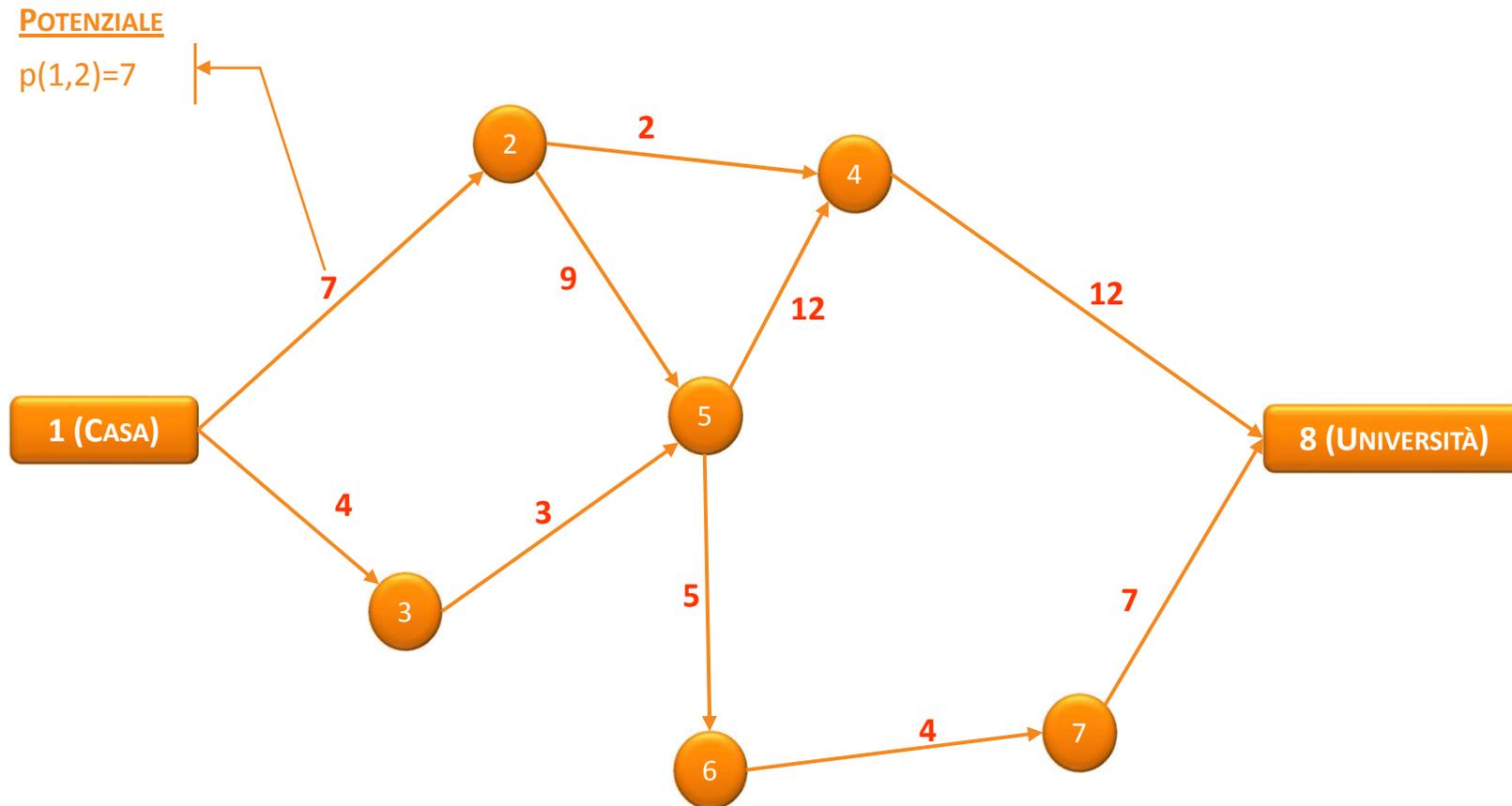
- Per ogni i in T , adiacente a j per cui $f(i) > f(j) + p(i,j)$
 - $f(i) = f(j) + p(i,j)$
 - $J(i) = j$
 - Si torna alla procedura "Assegnazione di etichetta permanente"
-



I quattro problemi fondamentali

PROBLEMI **SP** (**SHORT PATH**): ALGORITMO DI DIJKSTRA

Descrizione dell'algoritmo in relazione al problema SP Casa-Università



Grafo schema del problema

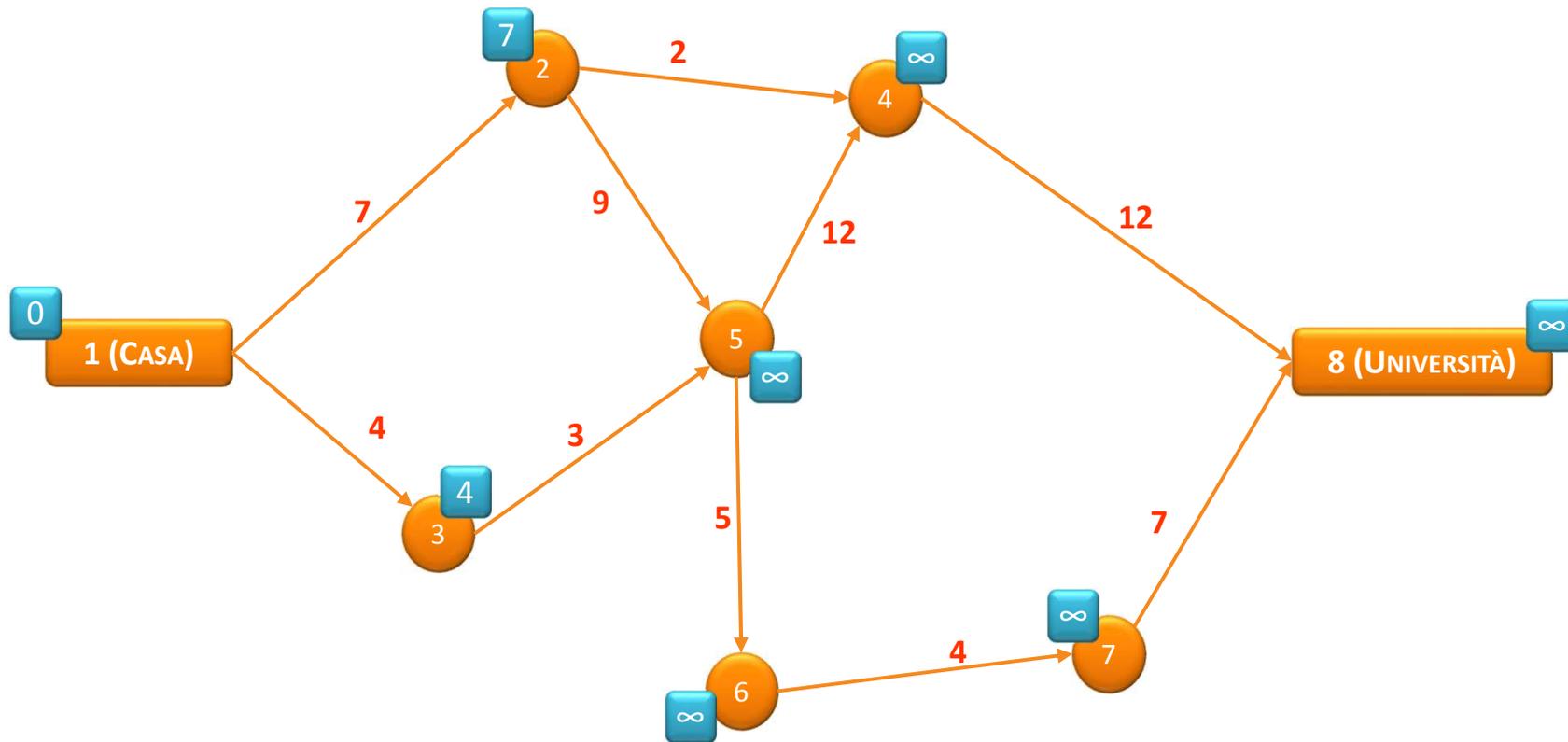
I quattro problemi fondamentali

PROBLEMI **SP** (**SHORT PATH**): ALGORITMO DI DIJKSTRA

Descrizione dell'algoritmo in relazione al problema **SP Casa-Università**

INIZIALIZZAZIONE

$S=\{1\}$, $T=\{2,3,4,5,6,7,8\}$
 $J(1)=0$ $J(2)=1$ $J(3)=1$



Grafo schema del problema

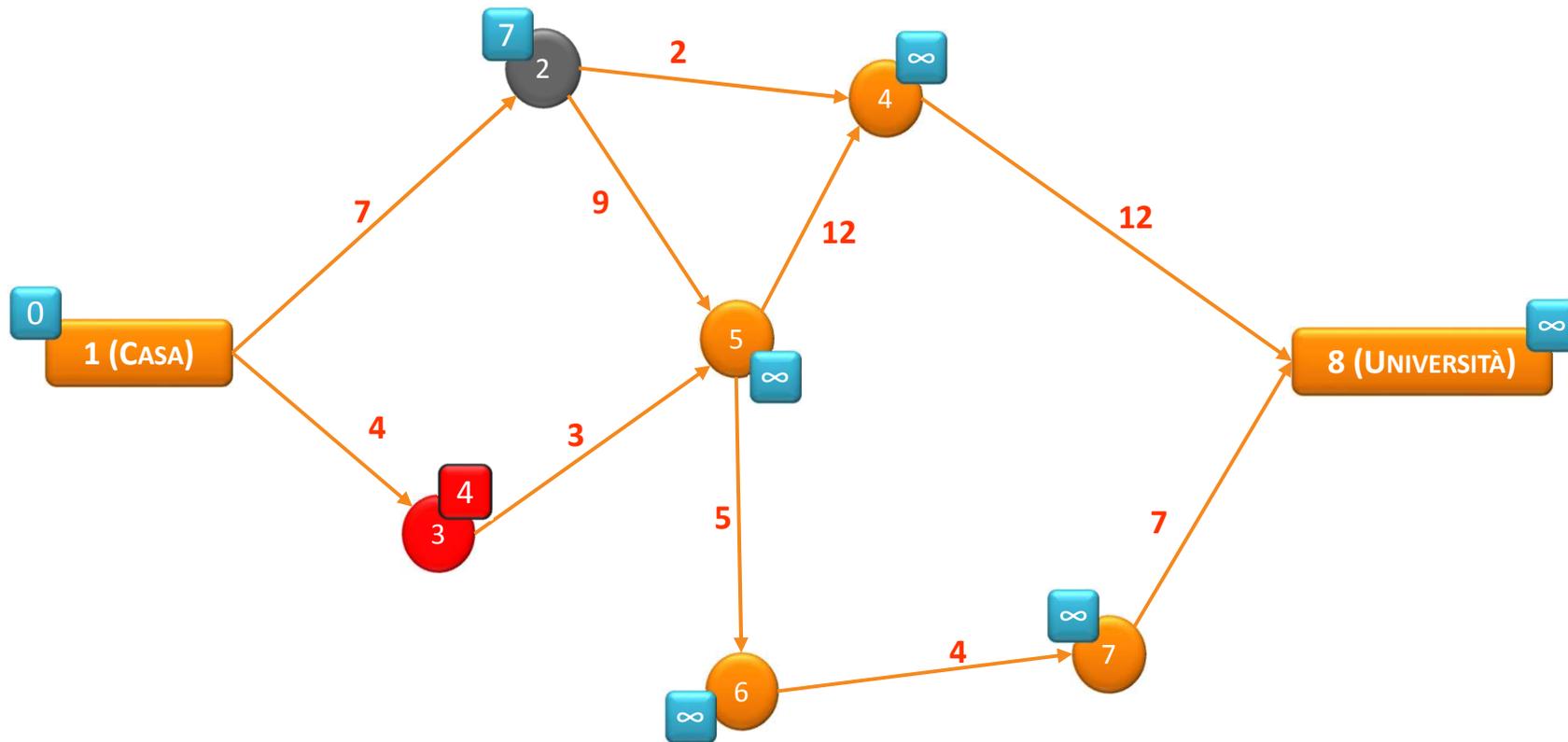
I quattro problemi fondamentali

PROBLEMI **SP** (**SHORT PATH**): ALGORITMO DI DIJKSTRA

Descrizione dell'algoritmo in relazione al problema **SP Casa-Università**

ASSEGNAZIONE DI ETICHETTA PERMANENTE

$S=\{1,2,3\}$, $T=\{4,5,6,7,8\}$
 $J(1)=0$ $J(2)=1$ $J(3)=1$



Grafo schema del problema

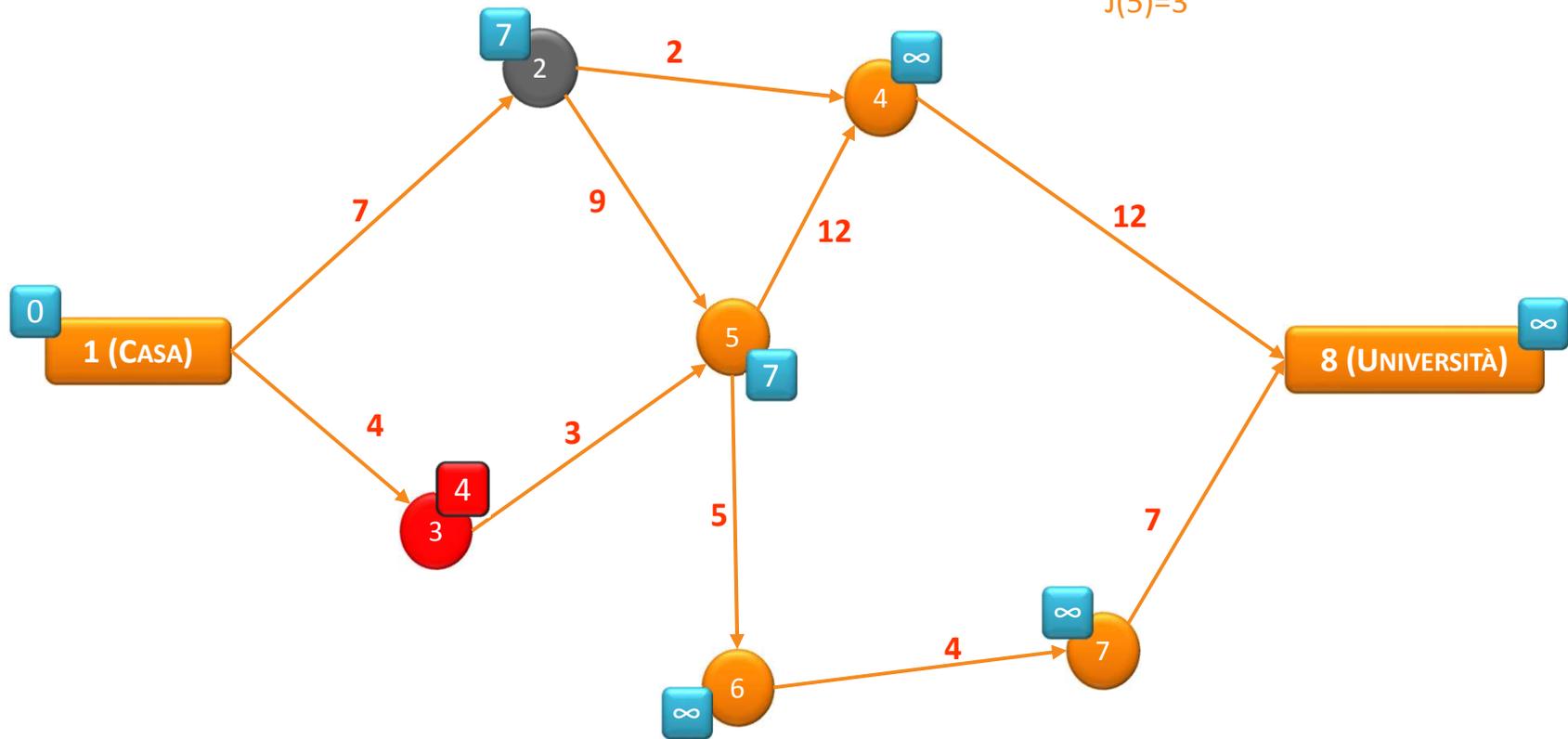
I quattro problemi fondamentali

PROBLEMI **SP** (**SHORT PATH**): ALGORITMO DI DIJKSTRA

Descrizione dell'algoritmo in relazione al problema **SP Casa-Università**

ASSEGNAZIONE DI ETICHETTA PROVVISORIA

$S=\{1,2,3,5\}$, $T=\{4, 6,7,8\}$
 $J(1)=0$ $J(2)=1$ $J(3)=1$
 $J(5)=3$



Grafo schema del problema

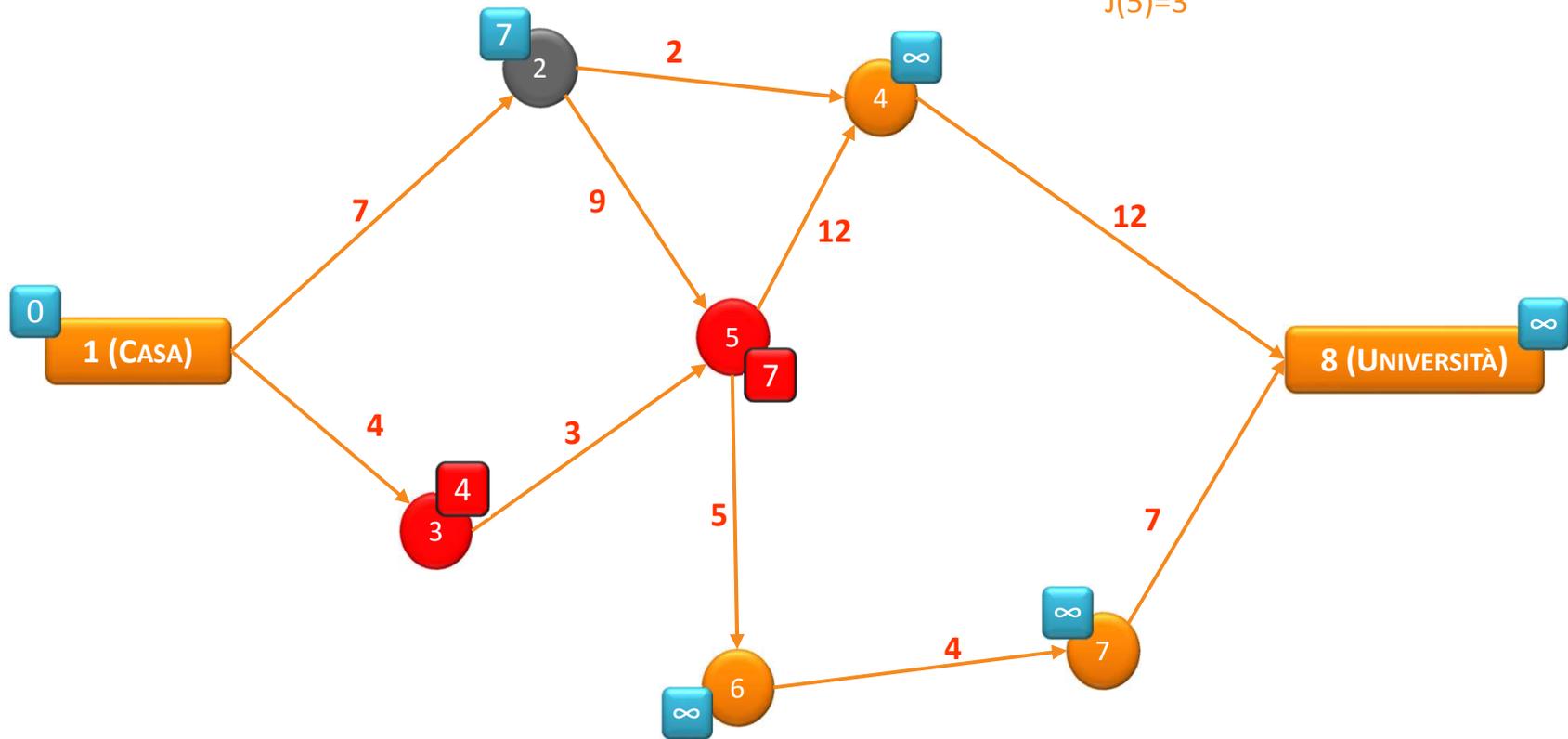
I quattro problemi fondamentali

PROBLEMI **SP** (**SHORT PATH**): ALGORITMO DI DIJKSTRA

Descrizione dell'algoritmo in relazione al problema **SP Casa-Università**

ASSEGNAZIONE DI ETICHETTA PERMANENTE

$S=\{1,2,3\}$, $T=\{4,5,6,7,8\}$
 $J(1)=0$ $J(2)=1$ $J(3)=1$
 $J(5)=3$



Grafo schema del problema

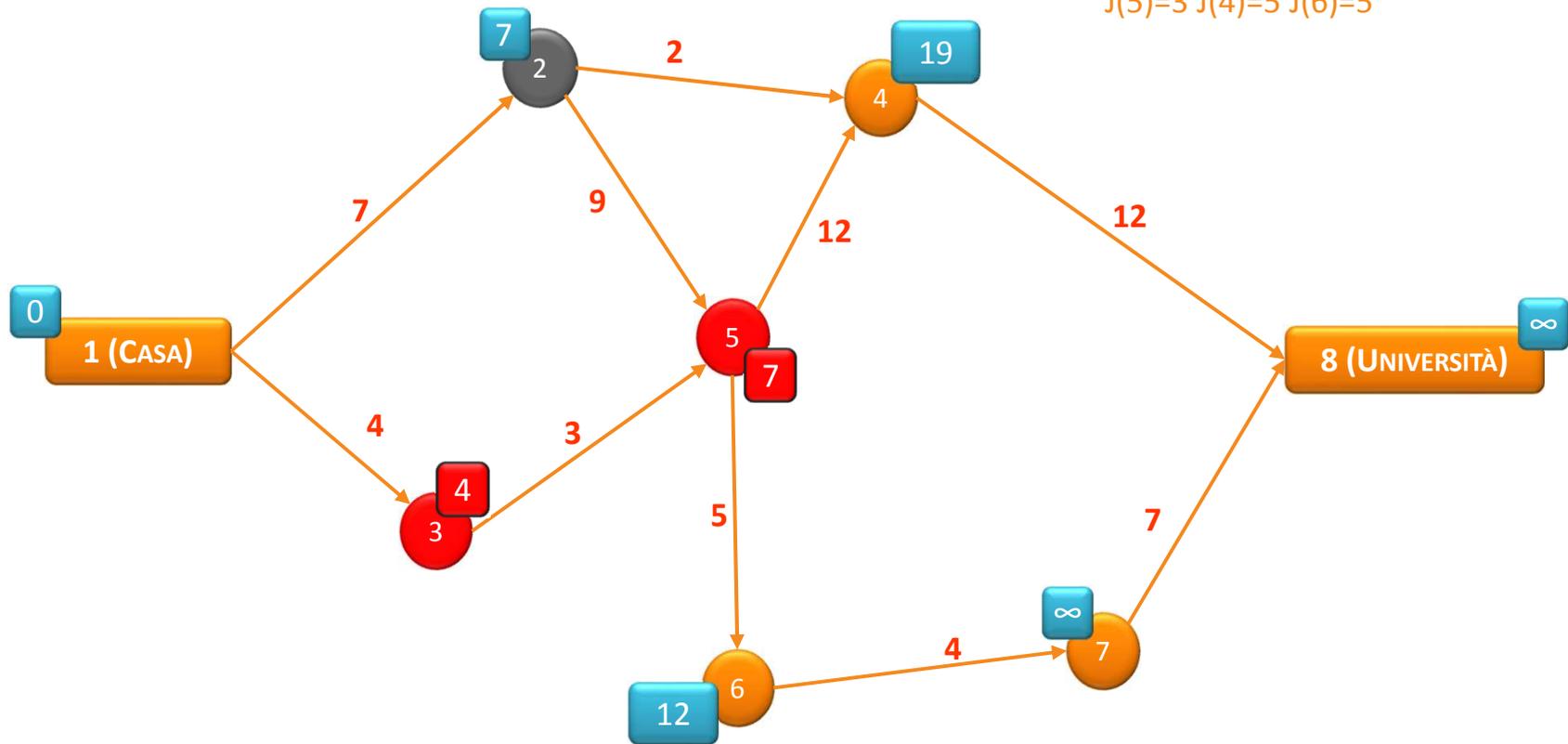
I quattro problemi fondamentali

PROBLEMI SP (SHORT PATH): ALGORITMO DI DIJKSTRA

Descrizione dell'algoritmo in relazione al problema SP Casa-Università

ASSEGNAZIONE DI ETICHETTA PROVVISORIA

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $T = \{7, 8\}$
 $J(1) = 0$ $J(2) = 1$ $J(3) = 1$
 $J(5) = 3$ $J(4) = 5$ $J(6) = 5$



Grafo schema del problema

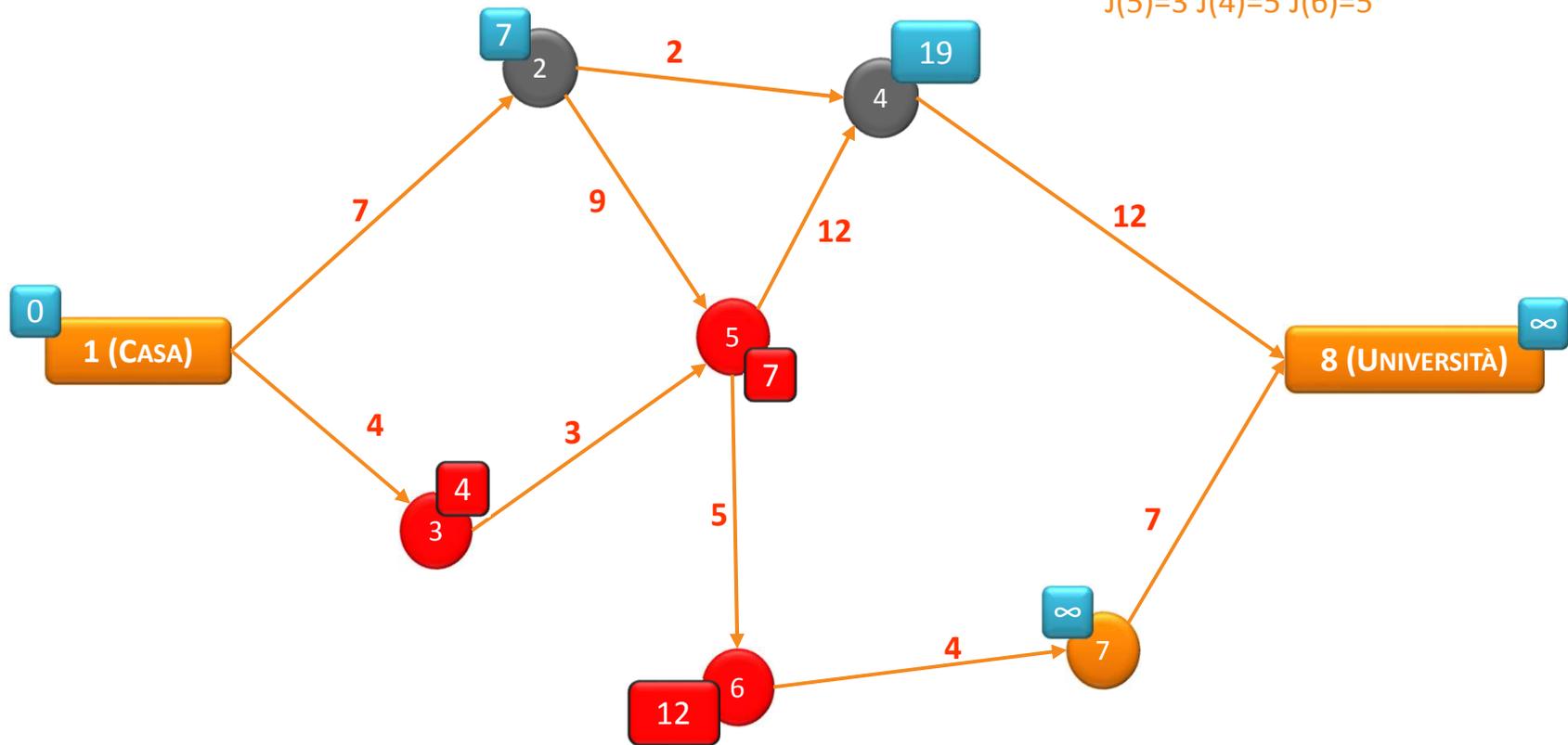
I quattro problemi fondamentali

PROBLEMI **SP** (**SHORT PATH**): ALGORITMO DI DIJKSTRA

Descrizione dell'algoritmo in relazione al problema **SP Casa-Università**

ASSEGNAZIONE DI ETICHETTA PERMANENTE

$S=\{1,2,3,4,5,6\}$, $T=\{7,8\}$
 $J(1)=0$ $J(2)=1$ $J(3)=1$
 $J(5)=3$ $J(4)=5$ $J(6)=5$



Grafo schema del problema

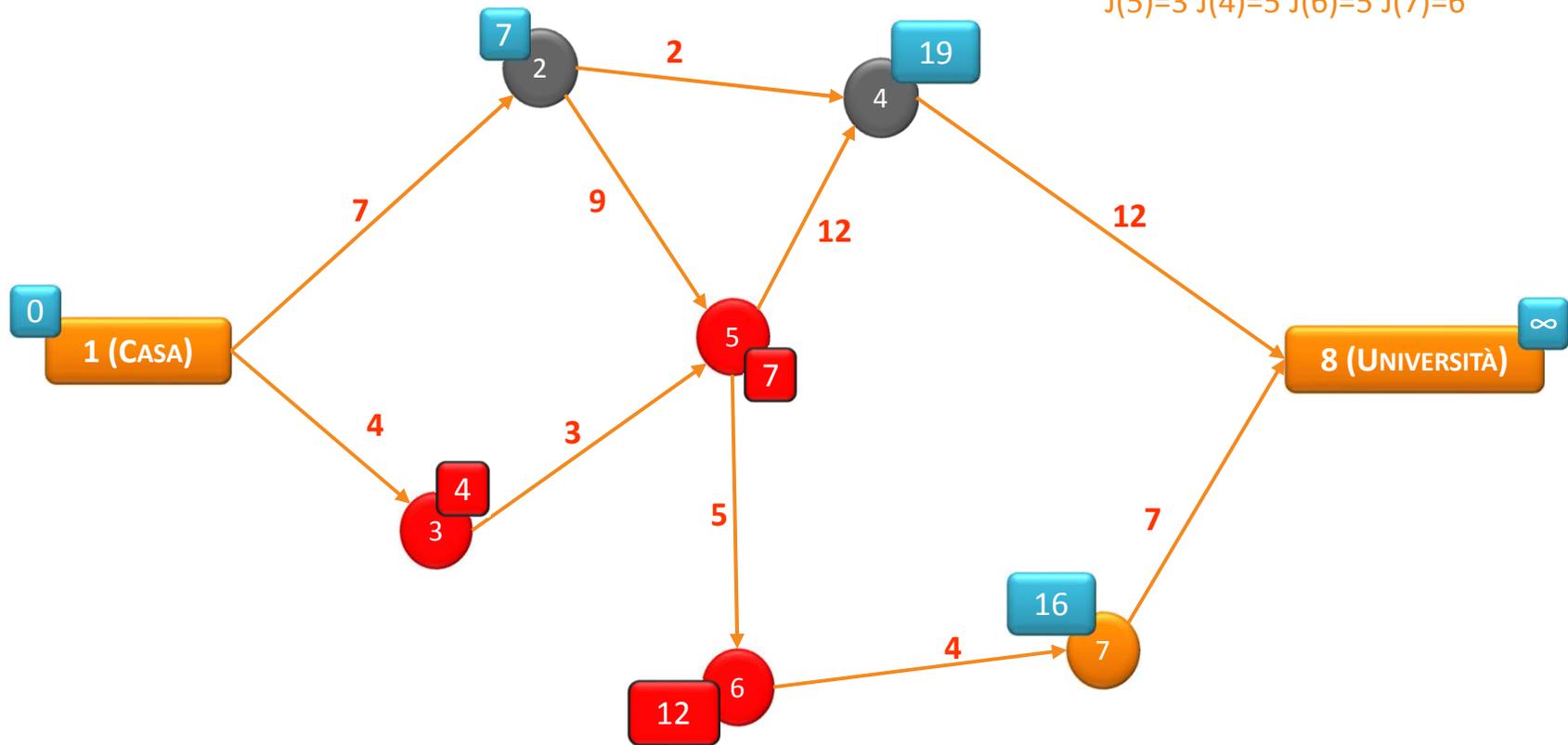
I quattro problemi fondamentali

PROBLEMI **SP** (**SHORT PATH**): ALGORITMO DI DIJKSTRA

Descrizione dell'algoritmo in relazione al problema **SP Casa-Università**

ASSEGNAZIONE DI ETICHETTA PROVVISORIA

$S=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $T=\{8\}$
 $J(1)=0$ $J(2)=1$ $J(3)=1$
 $J(5)=3$ $J(4)=5$ $J(6)=5$ $J(7)=6$



Grafo schema del problema

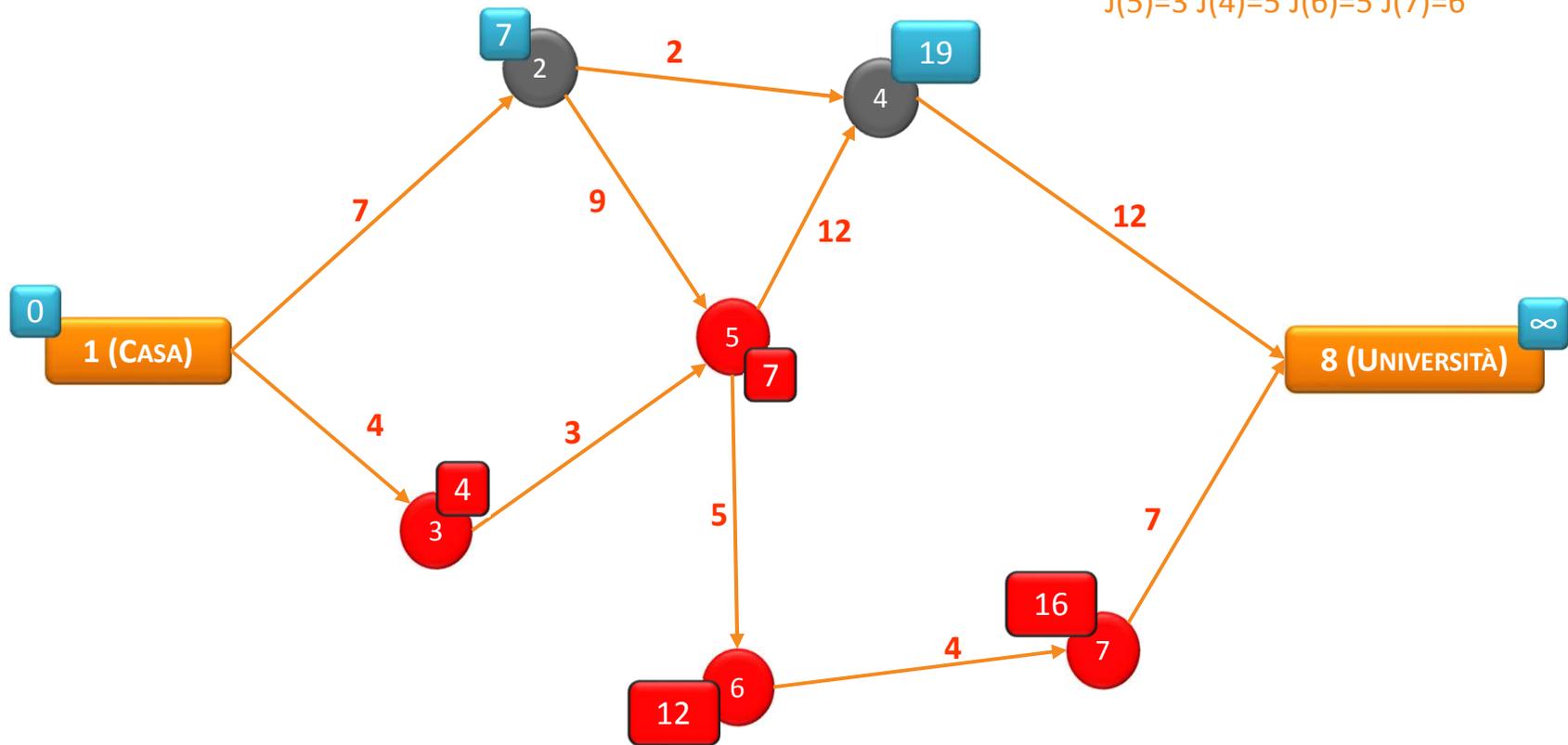
I quattro problemi fondamentali

PROBLEMI **SP** (**SHORT PATH**): ALGORITMO DI DIJKSTRA

Descrizione dell'algoritmo in relazione al problema **SP Casa-Università**

ASSEGNAZIONE DI ETICHETTA PERMANENTE

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $T = \{8\}$
 $J(1) = 0$ $J(2) = 1$ $J(3) = 1$
 $J(5) = 3$ $J(4) = 5$ $J(6) = 5$ $J(7) = 6$



Grafo schema del problema

I quattro problemi fondamentali

PROBLEMI SP (SHORT PATH): ALGORITMO DI DIJKSTRA

Descrizione dell'algoritmo in relazione al problema SP Casa-Università

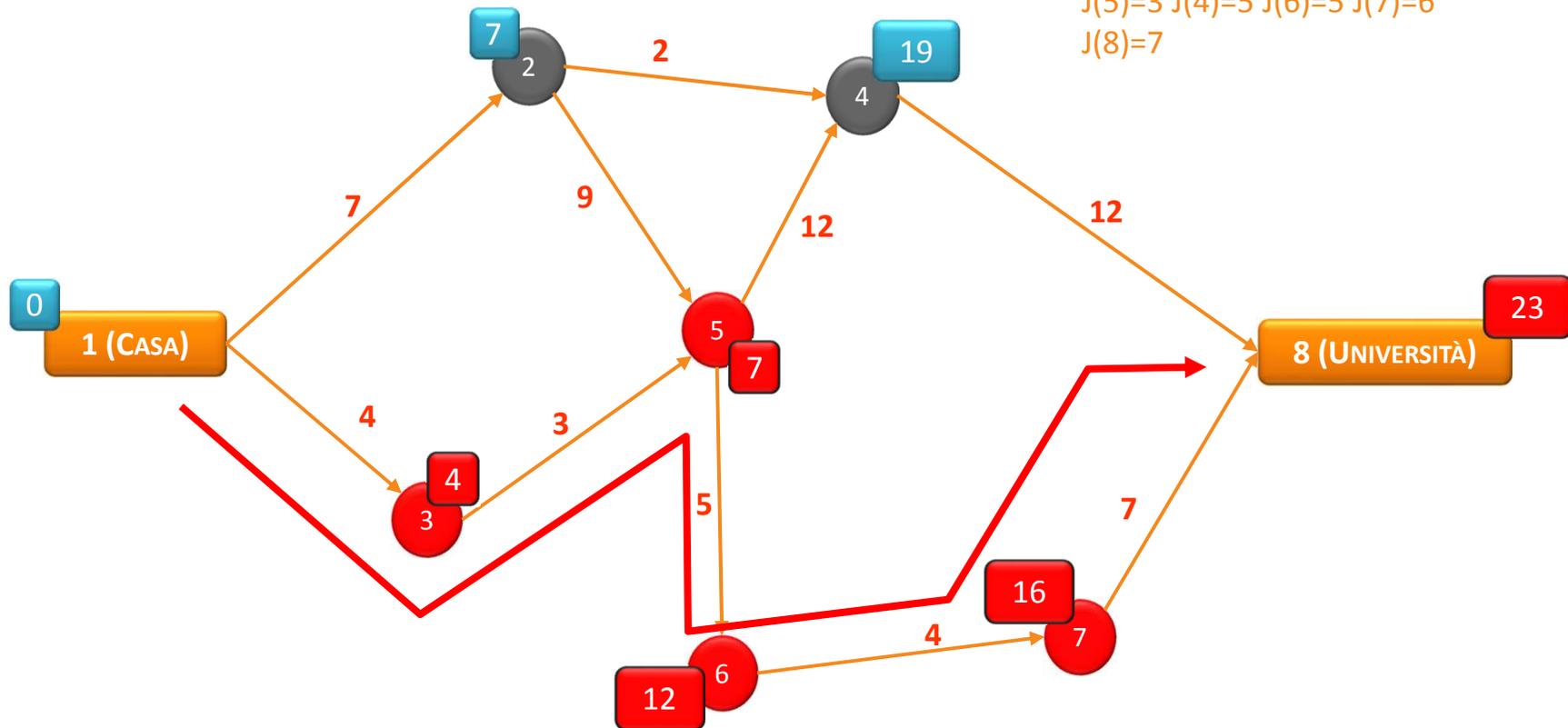
ASSEGNAZIONE DI ETICHETTA PROVVISORIA

$S=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $T=\{\emptyset\}$

$J(1)=0$ $J(2)=1$ $J(3)=1$

$J(5)=3$ $J(4)=5$ $J(6)=5$ $J(7)=6$

$J(8)=7$



Grafo schema del problema



La scienza è conoscenza organizzata.

Herbert Spencer

