



Università degli Studi di Ferrara  
Facoltà di Scienze MM FF NN  
Corso di Laurea in «*Scienze e Tecnologie per i Beni Culturali*»

AA 2010-2011

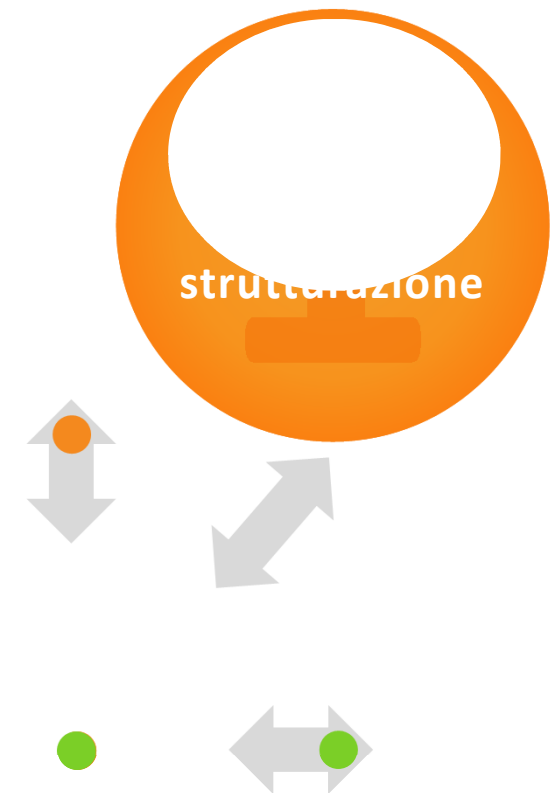
# INFORMATICA

Prof. Giorgio Poletti  
[giorgio.poletti@unife.it](mailto:giorgio.poletti@unife.it)

# Teoria dei grafi

“La mente umana deve prima costruire delle forme in maniera indipendente, prima di ritrovarle nelle cose.”

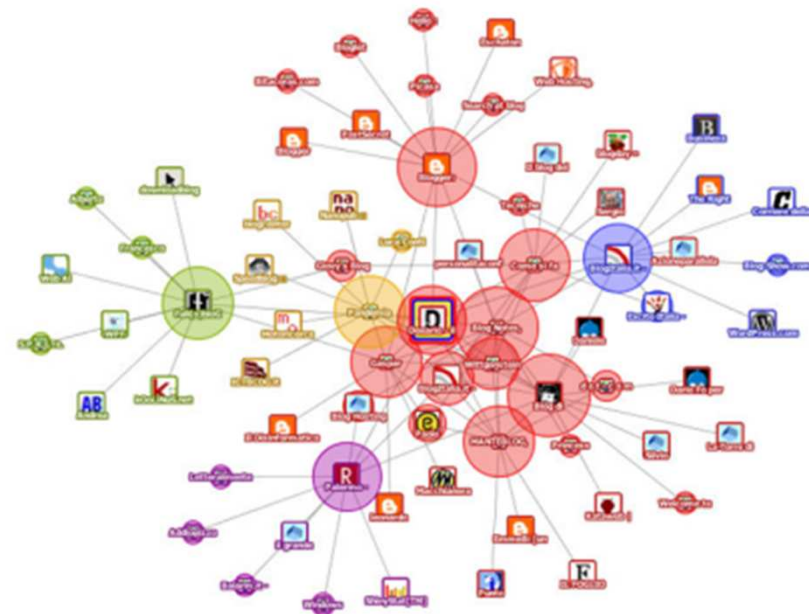
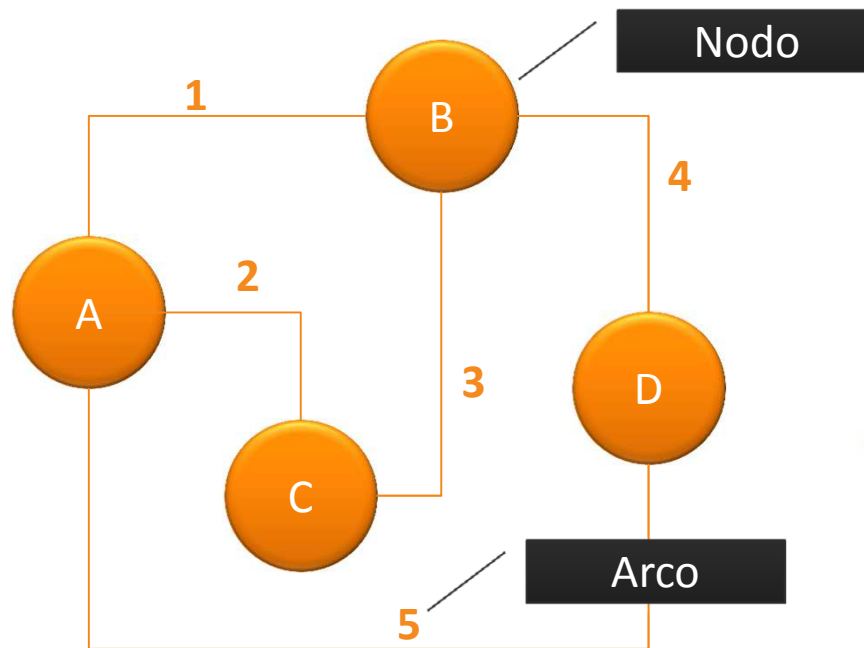
*(Albert Einstein)*



# Teoria dei Grafi

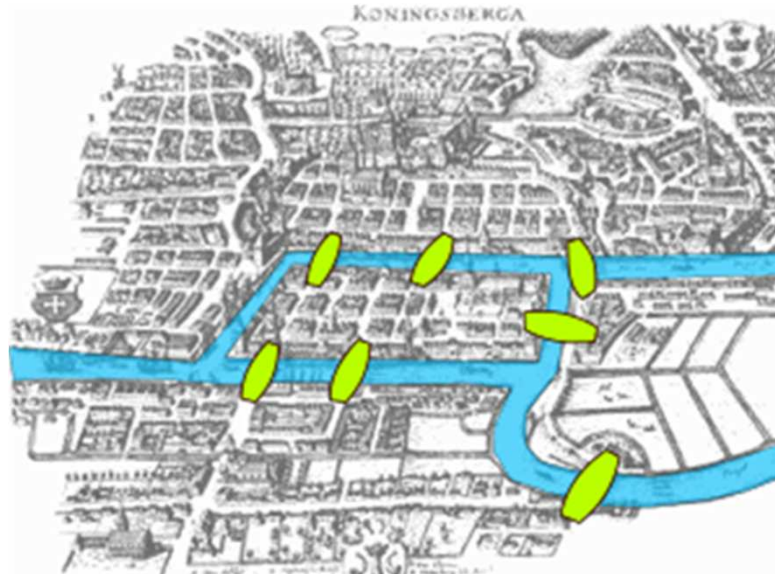
**GRAFO:** *struttura relazionale* composta da un insieme finito di oggetti (*un insieme finito di punti*) detti **nodi** (o *vertici*) e da un insieme di relazioni (geometricamente *segmenti di retta* o di *curva*) tra coppie di oggetti detti **archi** (o *spigoli*).

$$G(N, A)$$



# Teoria dei Grafi

*ORIGINE: problema dei ponti di Königsberg e il teorema di Eulero*



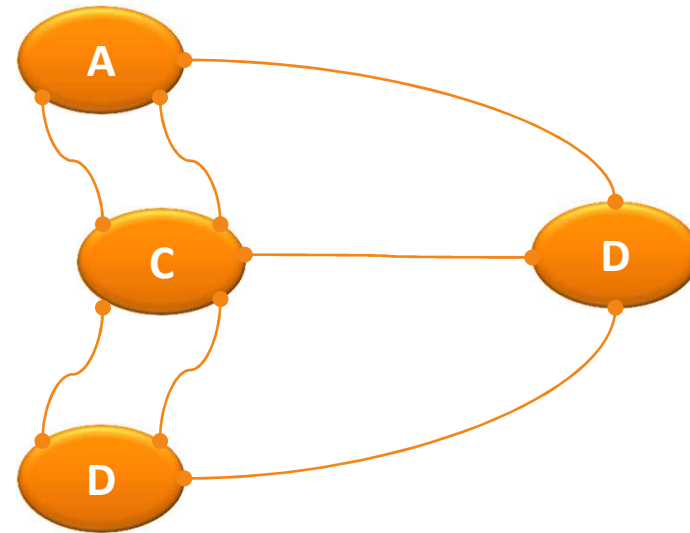
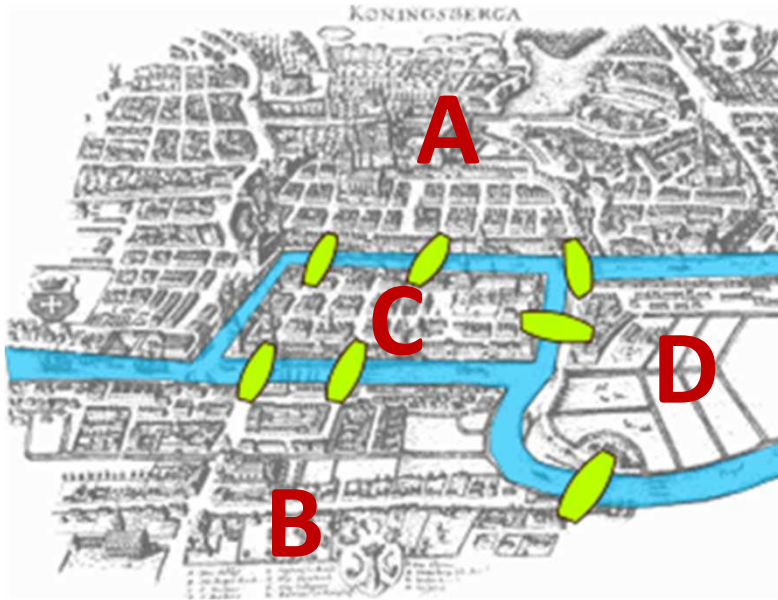
Mappa di **Königsberg** ai tempi di Eulero, e la disposizione dei ponti sul fiume Pregel  
(immagine tratta da Wikipedia)

## Teorema di Eulero

«Condizione necessaria e sufficiente affinché un grafo sia percorribile completamente partendo da un nodo e ritornandovi passando una volta solamente per ciascun arco é che esista un percorso fra ogni coppia di nodi e che ogni nodo sia toccato da un numero pari di archi.»

# Teoria dei Grafi

*Dal logico al topologico*

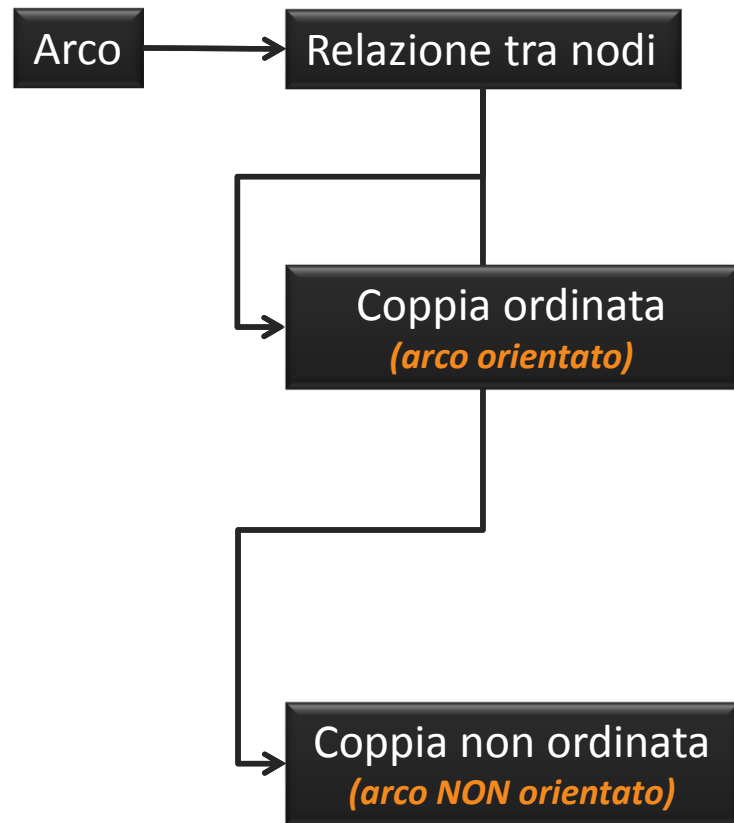


Processo **logico** della soluzione del problema

Analisi e studio **topologico** del grafo costruito

# Teoria dei Grafi

*Elementi di un grafo: archi e nodi*



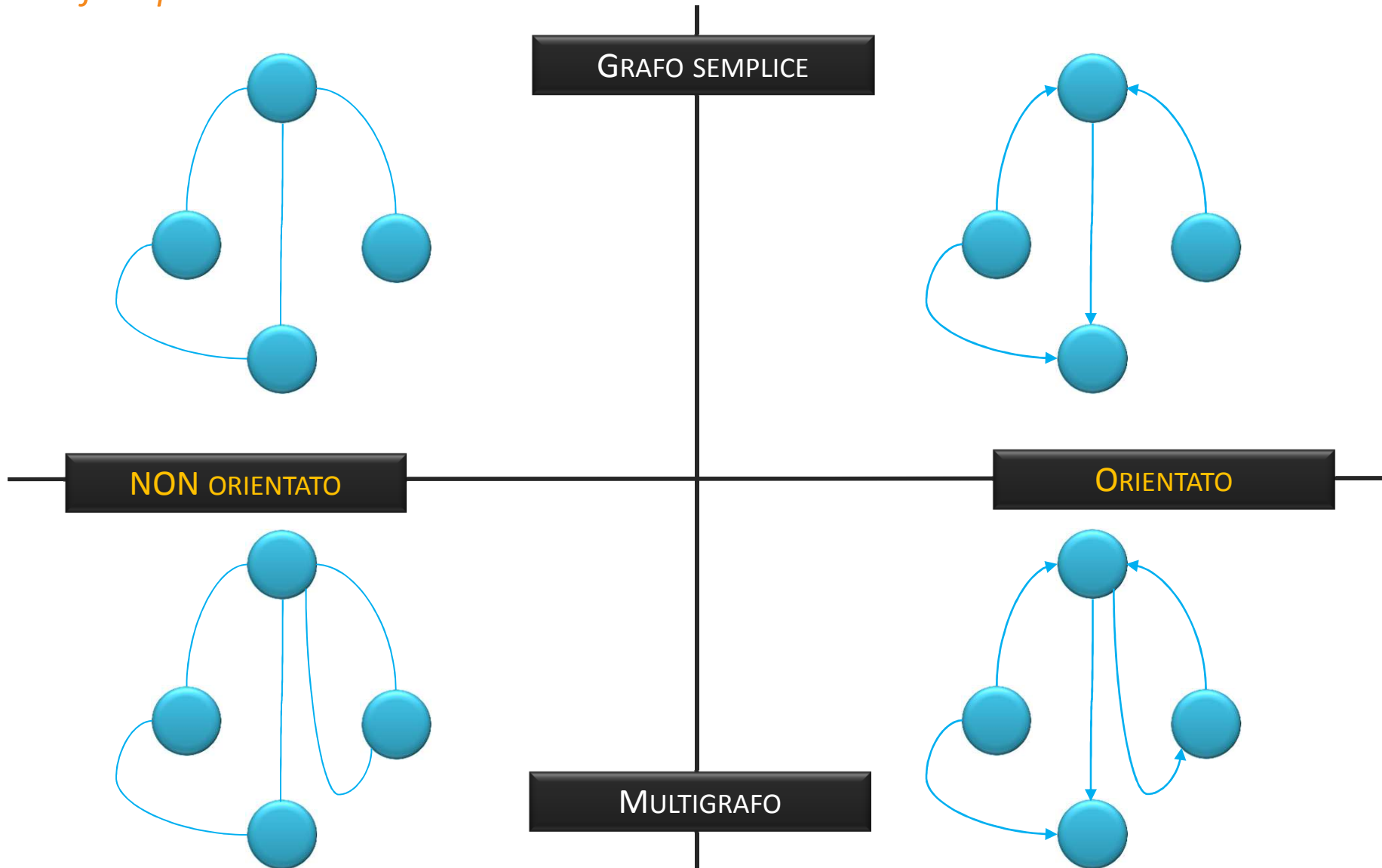
*CODA (arco di partenza)  
predecessore*

*TESTA (arco di arrivo)  
successore*



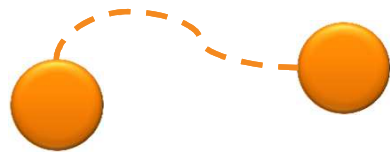
# Teoria dei Grafi

*Grafo: tipi e caratteristiche*

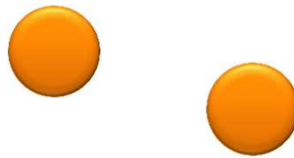


# Teoria dei Grafi

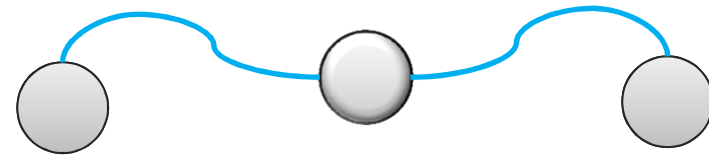
*Grafo: cammino e connessione*



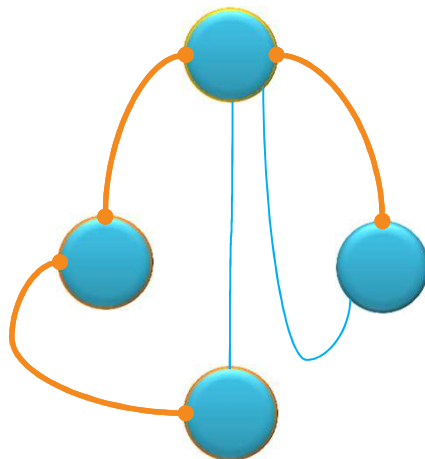
NODI ADIACENTI



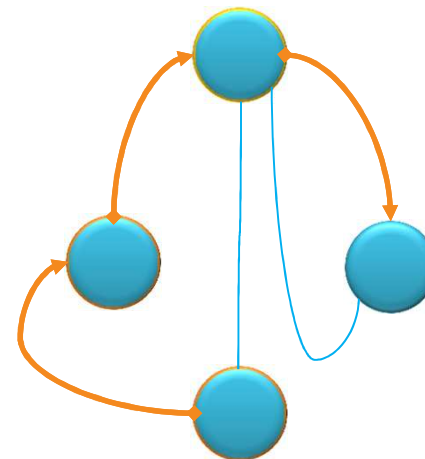
NODI ISOLATI



ARCHI ADIACENTI



CATENA (CAMMINO NON ORIENTATO )



CAMMINO

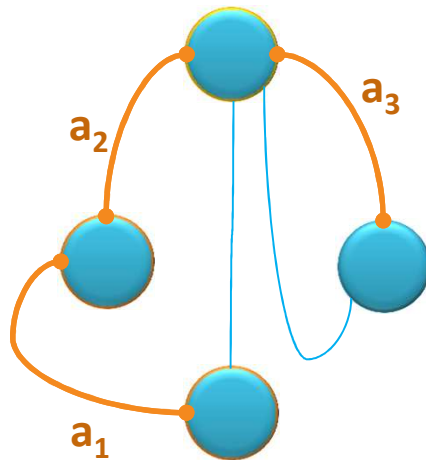
*(testa di ogni arco coincide con la coda del successivo)*



# Teoria dei Grafi

Cammino: semplice ed elementare

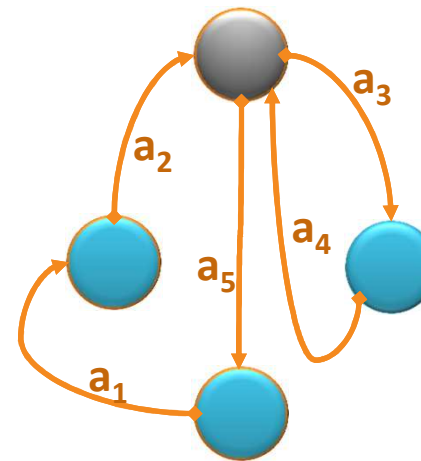
## GRAFO NON ORIENTATO



**CAMMINO:** sequenza di archi adiacenti  $(a_1, a_2, a_3)$

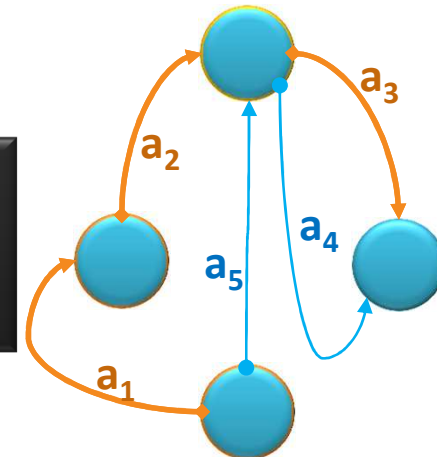
Un cammino in cui nodo di arrivo e nodo di partenza coincidono si dice **CICLO**

## GRAFO ORIENTATO



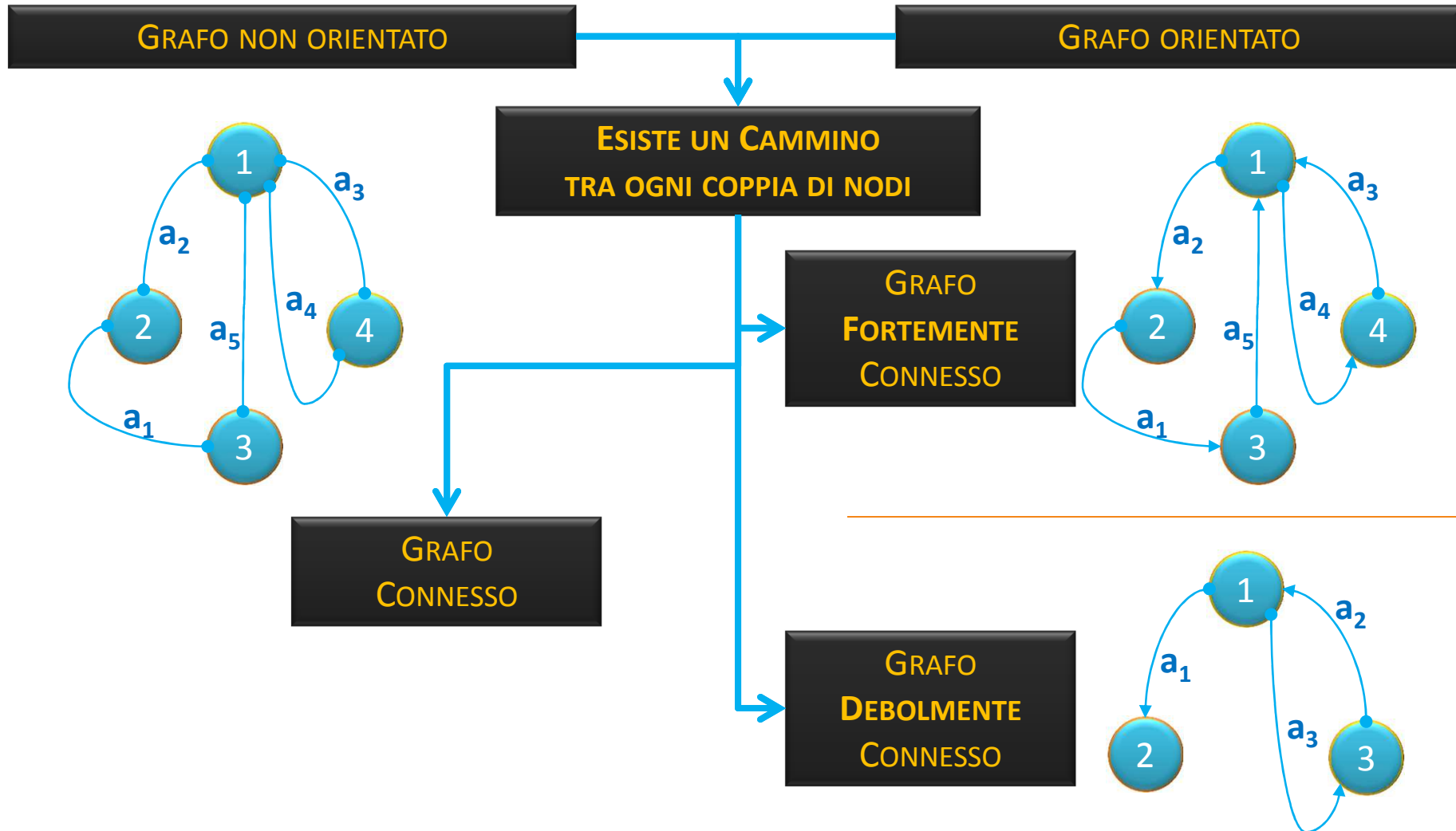
**CAMMINO SEMPLICE**  
«non passa mai 2 volte per lo stesso arco»  
 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$

**CAMMINO ELEMENTARE**  
«non passa mai 2 volte per lo stesso nodo»  
 $(a_1, a_2, a_3)$



# Teoria dei Grafi

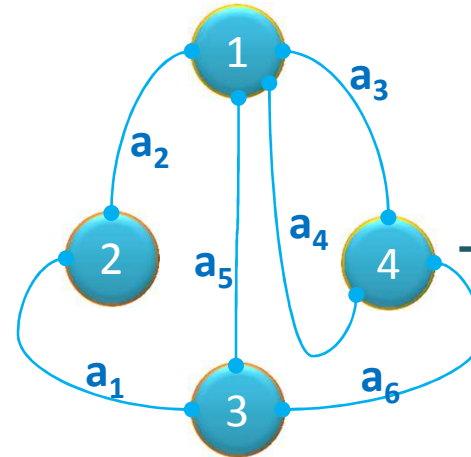
## Grafi connessi



# Teoria dei Grafi

*Grafi: altre definizioni*

**GRAFO COMPLETO** (1 arco per ogni coppia di nodi)



**GRADO DI UN NODO O CARDINALITÀ**  
(archi che incidono sul nodo)

Nodo 4: *grado 3*

GRAFO con tutti i nodi di uguale cardinalità ( $k$ ):

- Grafo regolare,  $k$ -regolare
- $k=3$ : grafo cubico

# Teoria dei Grafi

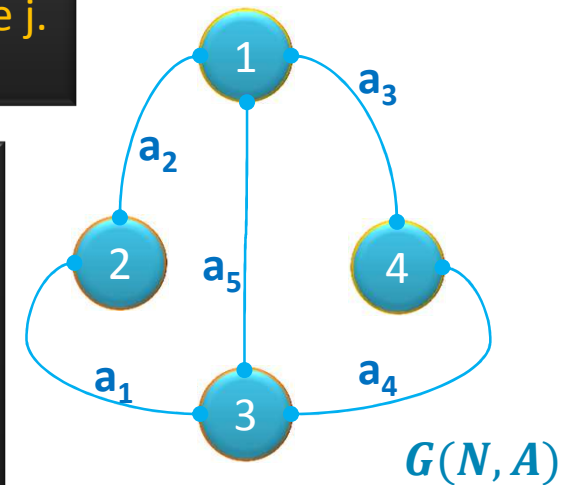
Grafi: diametro raggio e centro

DISTANZA TRA 2 NODI  $d(i, j)$ : minimo numero di archi tra i nodi  $i$  e  $j$ .  
 $d(2,4) = 2$  ( $a_1, a_4$ )

DIAMETRO DI UN GRAFO  $D(i, j) = \max(i, j)d(i, j)$ : massima distanza tra 2 nodi del grafo

- $d(1,2) = d(2,1) = 1$  ( $a_2$ )
- $d(1,3) = d(3,1) = 1$  ( $a_5$ )
- $d(1,4) = d(4,1) = 1$  ( $a_3$ )
- $d(2,3) = d(3,2) = 1$  ( $a_1$ )
- $d(2,4) = d(4,2) = 2$  ( $a_1, a_4$ )
- $d(3,4) = d(4,3) = 1$  ( $a_4$ )

$$D(i, j) = \max(i, j)d(i, j) = 2$$



Per ogni nodo  $i$  RAGGIO:  $R(i) = \max d(i, j)$  (massima distanza tra il nodo  $i$  e tutti gli altri nodi  $j$ )

$$d(2,1) = 1 \quad (a_2)$$

$$d(2,3) = 1 \quad (a_1)$$

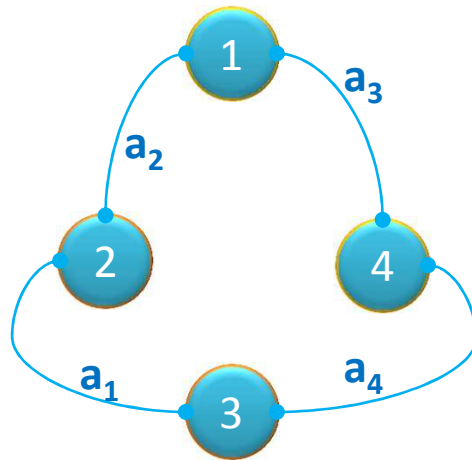
$$d(2,4) = 2 \quad (a_1, a_4) \rightarrow R(i) = \max d(i, j)$$

PER OGNI NODO  $k$  PER CUI :  $R(k) = \min R(i) \rightarrow k$  CENTRO DEL GRAFO

# Teoria dei Grafi

## Grafi euleriani

Dato un **grafo** o un **multigrafo**, un ciclo che passa esattamente una volta per ogni arco è detto **CICLO EULERIANO**; ogni grafo che ammette un **CICLO EULERIANO** è detto **GRAFO EULERIANO**.



### Grafo euleriano

(Ciclo euleriano:  $1 \rightarrow a_2 \rightarrow 2 \rightarrow a_1 \rightarrow 3 \rightarrow a_4 \rightarrow 4 \rightarrow a_3 \rightarrow 1$ )

(Ciclo euleriano:  $1 \rightarrow a_3 \rightarrow 4 \rightarrow a_4 \rightarrow 3 \rightarrow a_1 \rightarrow 2 \rightarrow a_2 \rightarrow 1$ )

Grafo euleriano

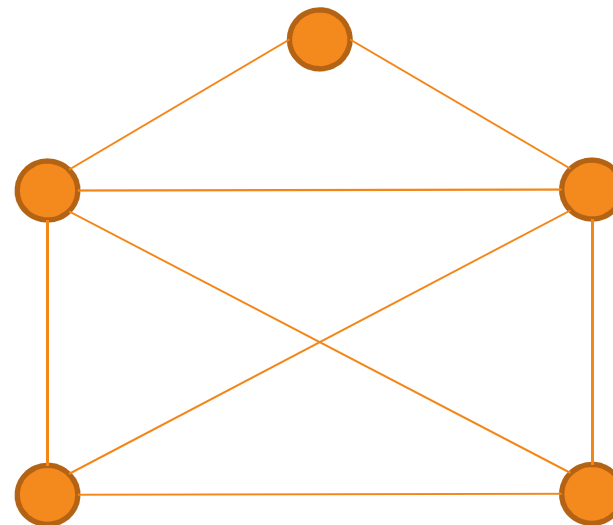
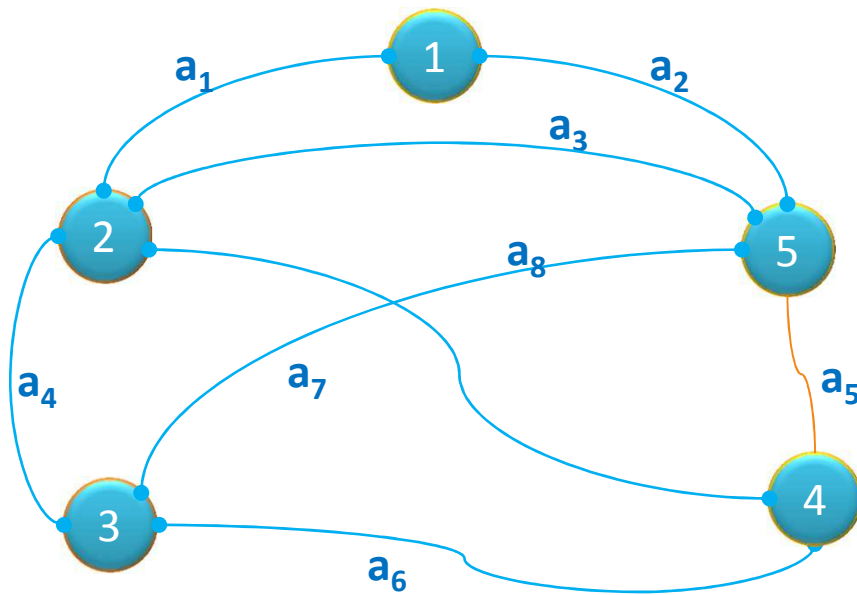
### Teorema di Eulero

«Condizione necessaria e sufficiente affinché un grafo sia percorribile completamente partendo da un nodo e ritornandovi passando una volta solamente per ciascun arco è che esista un percorso fra ogni coppia di nodi e che ogni nodo sia toccato da un numero pari di archi.»

# Teoria dei Grafi

## Grafi hamiltoniani

Dato un **grafo** o un **multigrafo**, un ciclo che passa esattamente una volta per ogni nodo è detto **CICLO HAMILTONIANO**; ogni grafo che ammette un **CICLO HAMILTONIANO** è detto **GRAFO HAMILTONIANO**.



### Grafo hamiltoniano

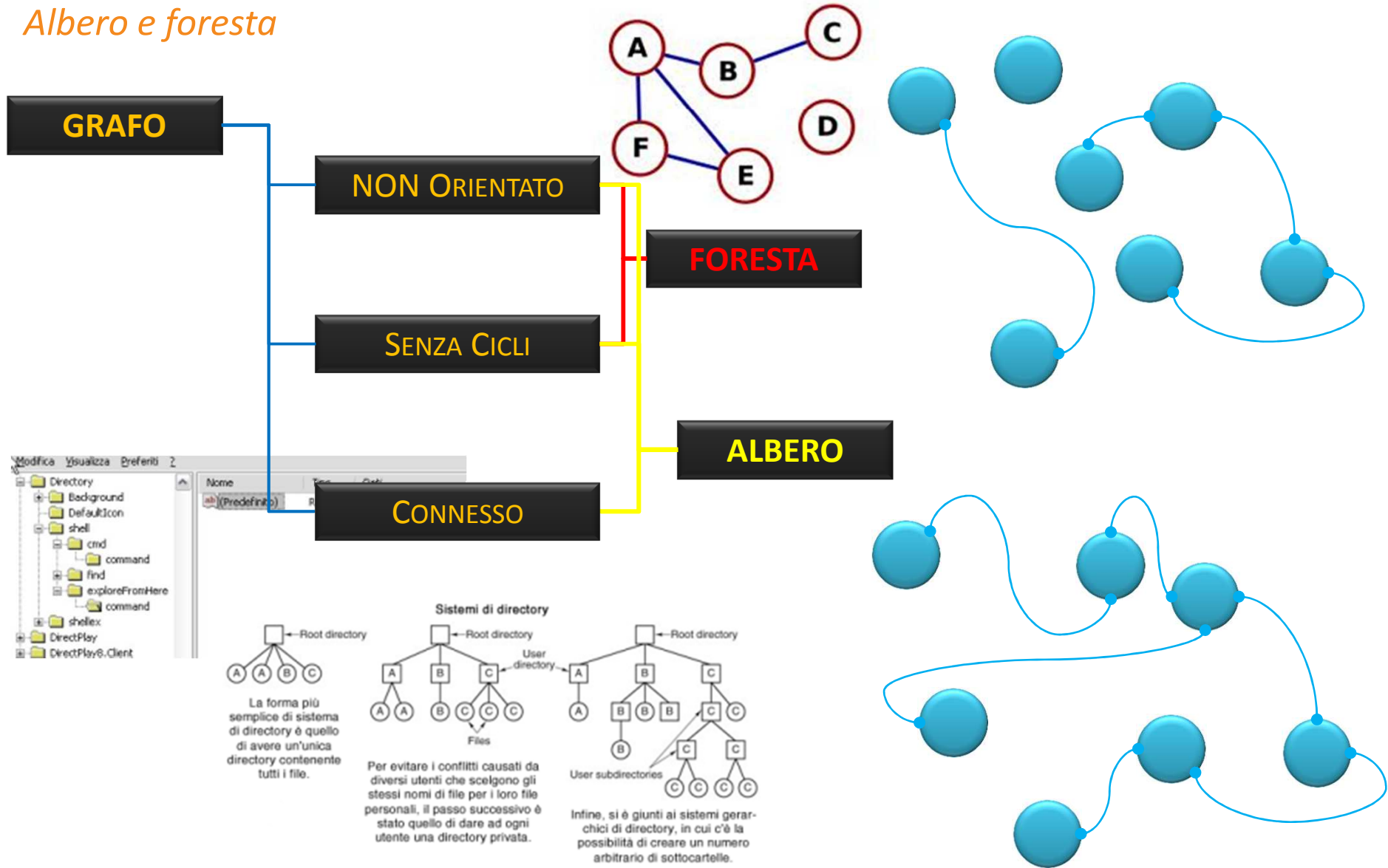
(Ciclo hamiltoniano:  $3 \rightarrow a_4 \rightarrow 2 \rightarrow a_1 \rightarrow 1 \rightarrow a_2 \rightarrow 5 \rightarrow a_3 \rightarrow 2 \rightarrow a_7 \rightarrow 4 \rightarrow a_5 \rightarrow 5 \rightarrow a_8 \rightarrow 3 \rightarrow a_6 \rightarrow 4$ )

(Ciclo hamiltoniano:  $3 \rightarrow a_4 \rightarrow 2 \rightarrow a_1 \rightarrow 1 \rightarrow a_2 \rightarrow 5 \rightarrow a_3 \rightarrow 2 \rightarrow a_7 \rightarrow 4 \rightarrow a_5 \rightarrow 5 \rightarrow a_8 \rightarrow 3 \rightarrow a_6 \rightarrow 4$ )

### Grafo hamiltoniano

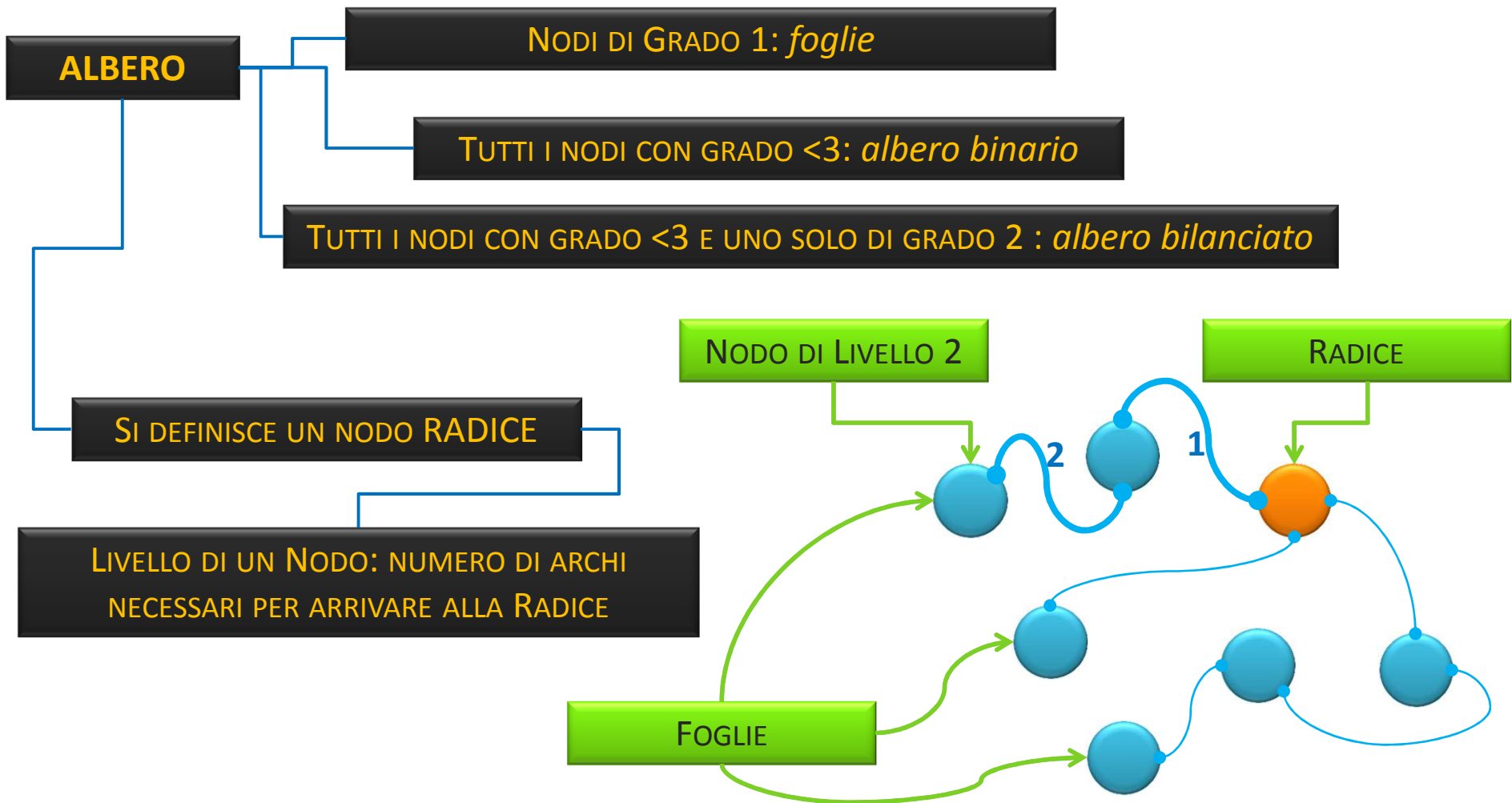
# Teoria dei Grafi

## Albero e foresta



# Teoria dei Grafi

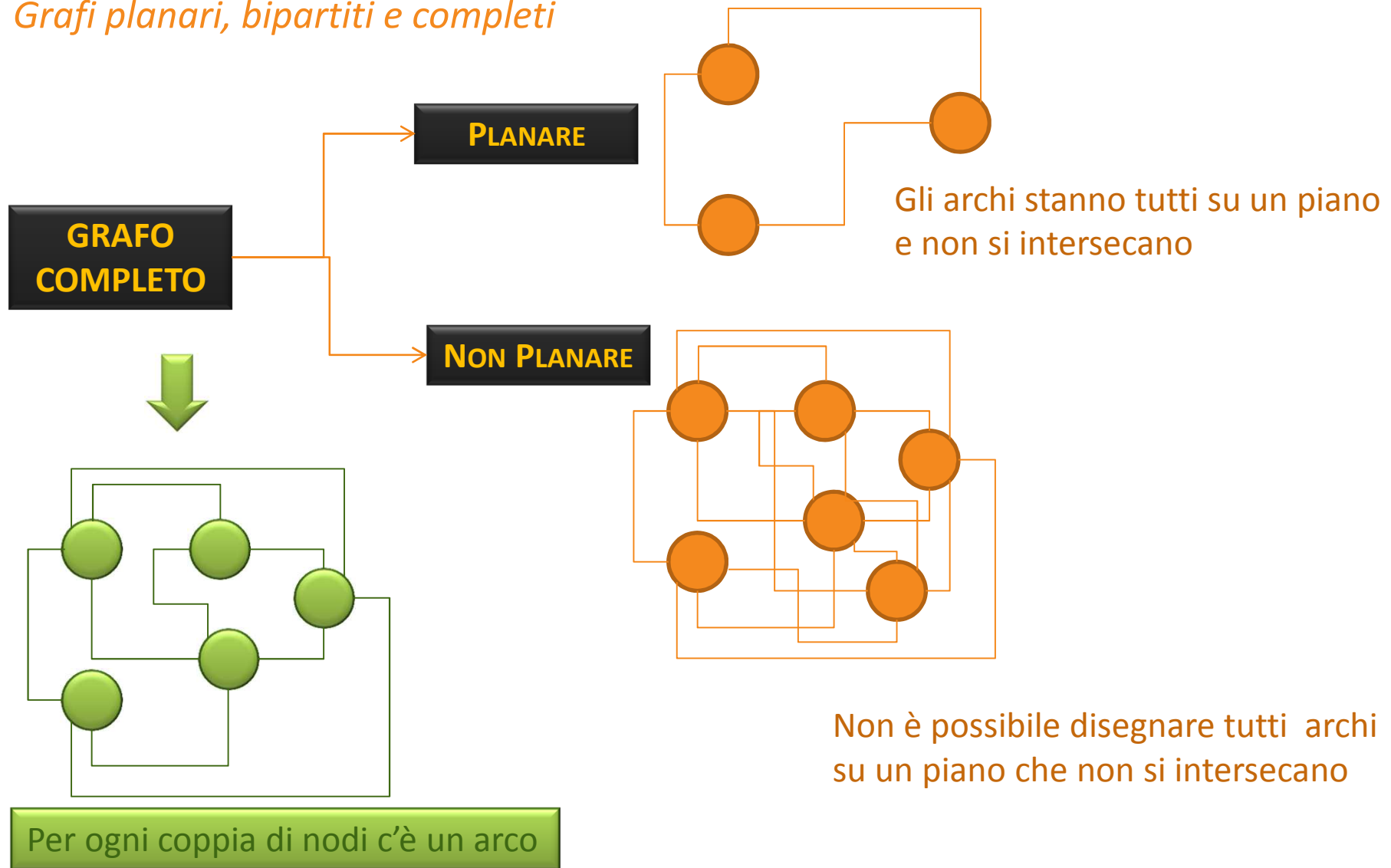
## Albero: alcune definizioni





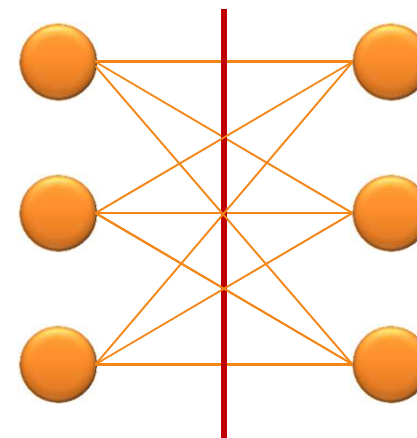
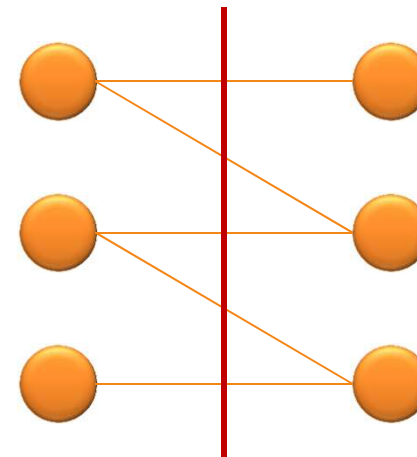
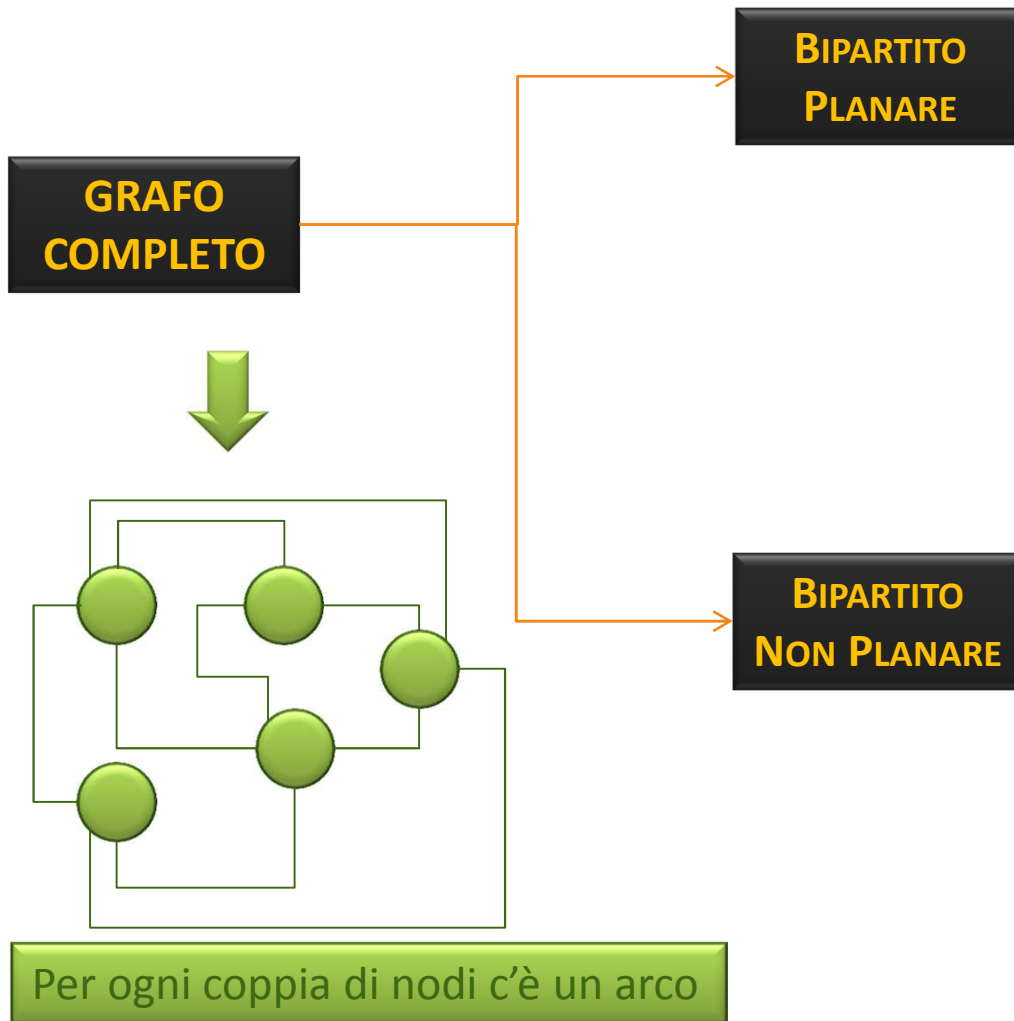
# Teoria dei Grafi

*Grafi planari, bipartiti e completi*



# Teoria dei Grafi

*Grafi planari, bipartiti e completi*





L'errore nasce sempre dalla tendenza dell'uomo a dedurre la causa della conseguenza.

*Arthur Schopenhauer*

