Informatica

CdS in ***«Sciente e Tecnologie dei Beni Culturali»*** **–** *AA 2014-2015*

Mini-sito dell'insegnamento: http://www.unife.it/scienze/beni.culturali/insegnamenti/informatica

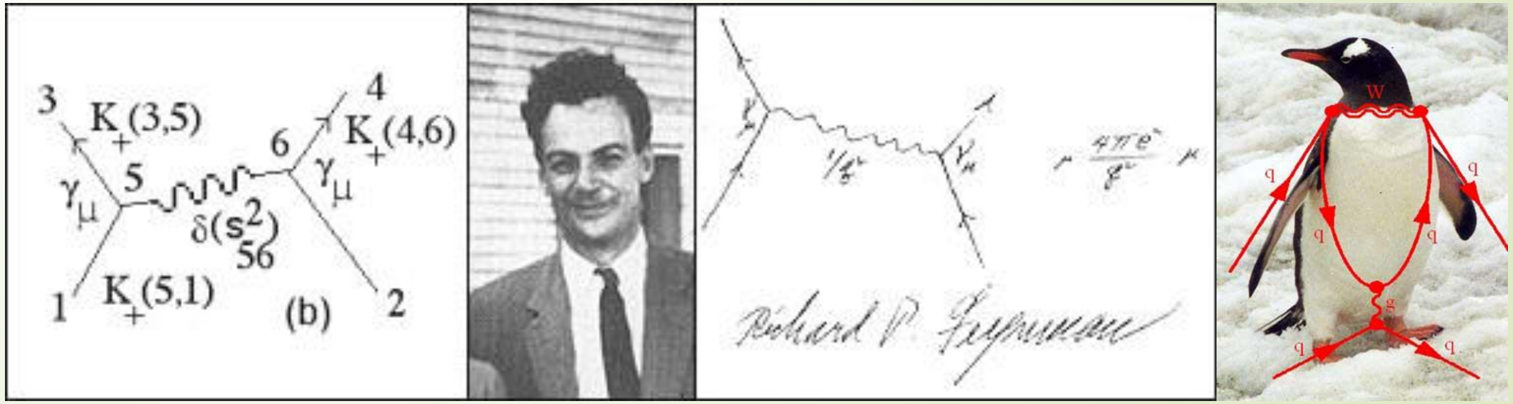
Prof. Giorgio Poletti
giorgio.poletti@unife.it - *http://docente.unife.it/giorgio.poletti*

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
- EX LABORE FRUCTUS -

Richard Phillips Feynman

Grafi e Problemi: esempi notevoli

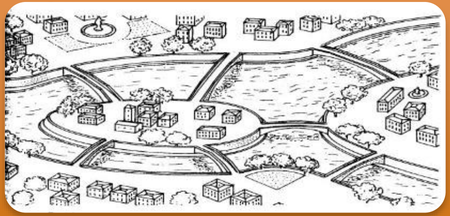
«Non so che cosa non va nella gente: non imparano usando l'intelligenza, ma solo meccanicamente o giù di li. Il loro sapere è così fragile.».»
(*Richard Phillips Feynman – da «Sta scherzando, Mr. Feynman»*)



Contenuti della lezione

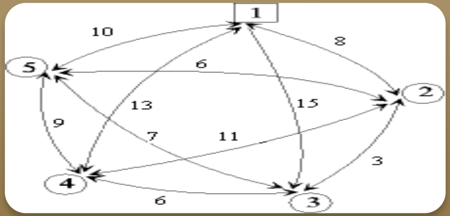
- **Grafi e Problemi**
  - Tipologia e rappresentazione: problemi-grafi
  - I quattro problemi fondamentali
  - Problemi, grafi e applicazioni
- **Problemi di SP (Short Path)**
  - Esempi notevoli di SP
  - Algoritmo di Dijkstra
  - Grafi e reti sociali: i 6 gradi di separazione

I 4 problemi fondamentali: applicazioni



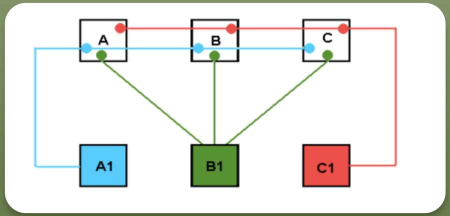
I PONTI DI KÖNIGSBERG

1. *Distribuzione, controllo e manutenzioni di reti, ad esempio elettriche, idriche o stradali*
2. *Ottimizzazione di percorsi ad esempio disptribuzione della posta(Chinese Postman's Problem)*



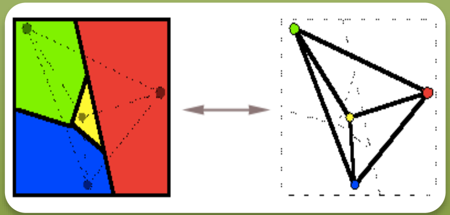
IL PROBLEMA DEL COMMESSO VIAGGIATORE

1. *Flussi di merci, ad esempio distribuzione merci tra magazzini, clienti e fornitori*
2. *Minimizzazione di percorsi (**problemi SP**, **S**hort **P**ath)*



IL PROBLEMA DELLE TRE CASE E LE TRE FORNITURE

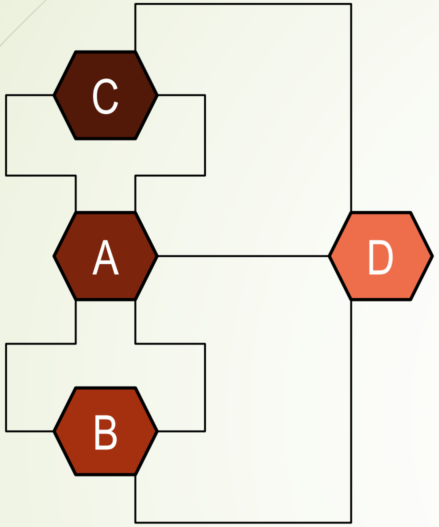
1. *Layout di reti idriche, stradali, elettriche e circuiti stampati*
2. *Layout di reti telematiche, connessione e collegamento tra computer*



IL TEOREMA DEI QUATTRO COLORI

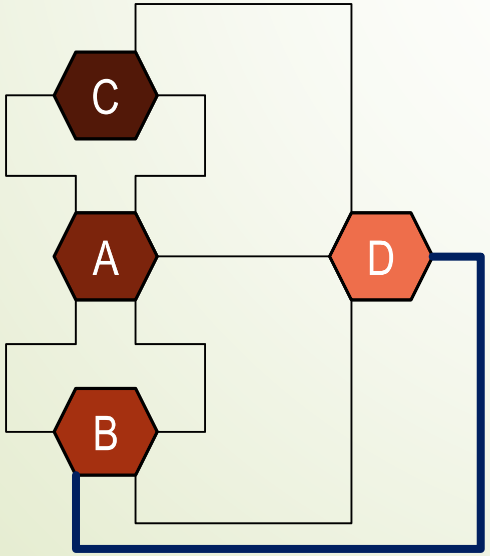
1. *Test di controllo di circuiti stampati*
2. *Allocazione e assegnazione registri CPU e frequenza radiotelevisive*

I ponti di Königsberg (sviluppi)



PROBLEMA BASE

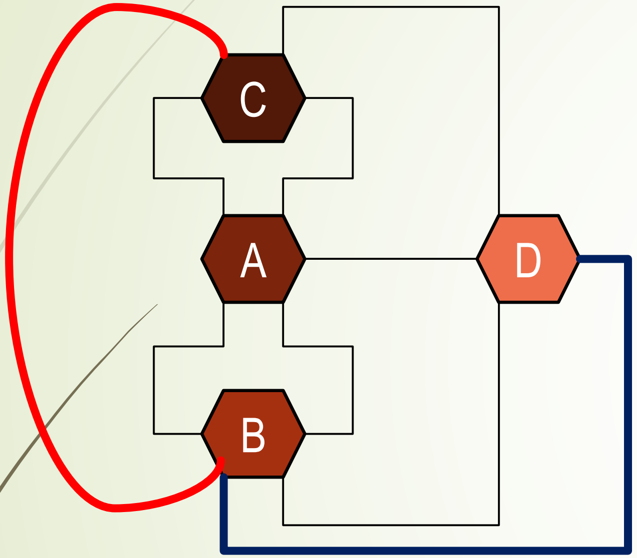
La città di Königsberg, è percorsa dal fiume Pregel e da suoi affluenti e presenta due estese isole che sono connesse tra di loro e con le due aree principali della città da sette ponti. Ci si pone la questione se sia possibile con una passeggiata seguire un percorso che attraversa ogni ponte una e una volta sola e tornare al punto di partenza.



L'OTTAVO PONTE DEL PRINCIPE BLU

*Il principe Blu, dopo aver analizzato il sistema dei ponti cittadini con l'aiuto della teoria dei grafi, si convince dell'impossibilità di passare i ponti. Decide allora di costruire di nascosto un ottavo ponte che gli permetta la sera di passare i ponti partendo dal suo **Schloß** (castello) e finendo alla **Gasthaus** (osteria) dove potersi vantare della sua riuscita; e inoltre fa in modo che il principe Rosso non riesca a fare altrettanto a partire dal suo Schloß.. Dove costruisce l'ottavo ponte il principe Blu?*

I ponti di Königsberg (sviluppi)

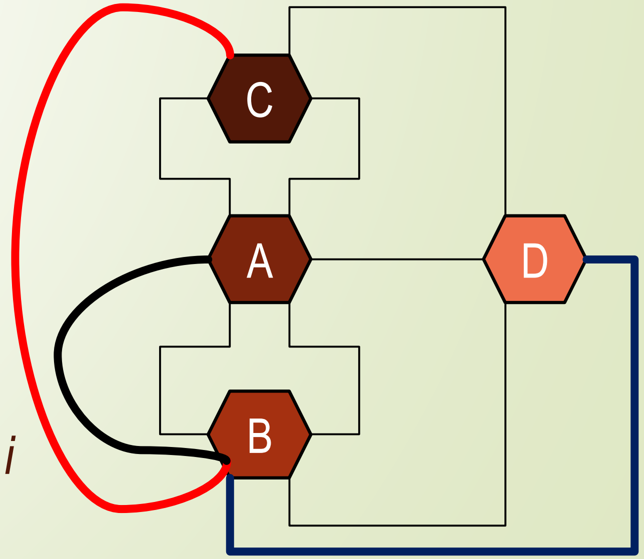


IL NONO PONTE DEL PRINCIPE ROSSO

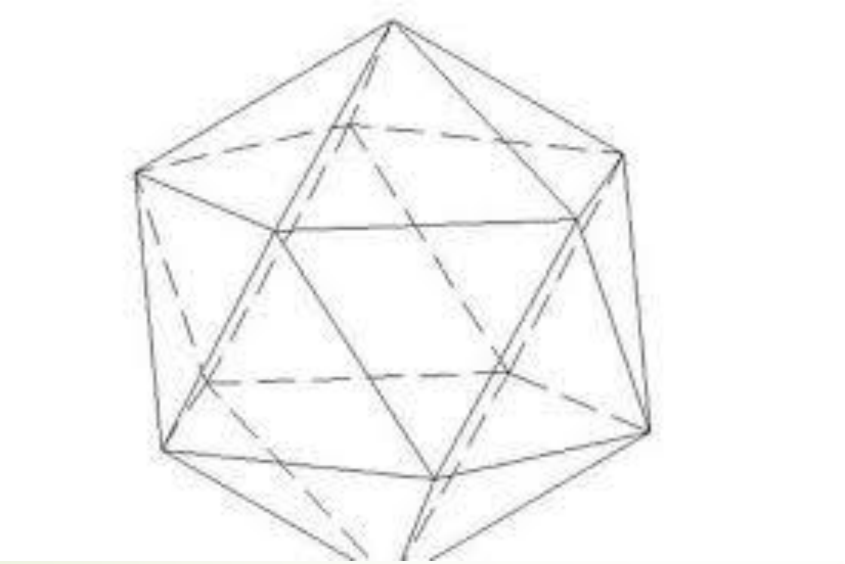
Il principe Rosso, imbufalito per la mossa del fratello, capisce che può reagire solo dopo aver studiato la teoria dei grafi; dopo un attento studio anche lui decide di costruire di nascosto un altro ponte che consenta a lui di traversare i ponti in modo di raggiungere dal suo Schloß la Gasthaus e qui prendere per i fondelli il fratello al quale diventa impossibile passare i ponti alla sua maniera.

IL DECIMO PONTE DEL VESCOVO

Il Vescovo ha dovuto assistere alla dispendiosa contesa cittadina con crescente irritazione. Essa ha portato alla formazione di due facinorose fazioni e ha fatto crescere il numero degli eccessivi frequentatori della Gasthaus, con danno della quiete pubblica. Quindi anche lui, dopo un accurato studio della teoria dei grafi, decide di costruire un decimo ponte che consenta a tutti i cittadini di passare tutti i ponti e fare ritorno alla propria casa tra i tranquilli affetti familiari.



Il problema del commesso viaggiatore: i grafi hamiltoniani



William Rowan Hamilton (1805-1865) inventò un gioco da tavolo, il ***puzzle di Hamilton*** o ***icosian game*.**

Un grafo è detto **hamiltoniano** se è possibile trovare un percorso che tocca tutti i vertici del grafo una e una sola volta (***analogo*** del grafo euleriano per gli archi)

Il problema del commesso viaggiatore: i grafi hamiltoniani

- Archi
- Condizione necessaria e sufficiente per definire un grafo euleriano

Teorema di Eulero

Teorema di Dirac

- Nodi
- Condizione sufficiente per un grafo hamiltoniano

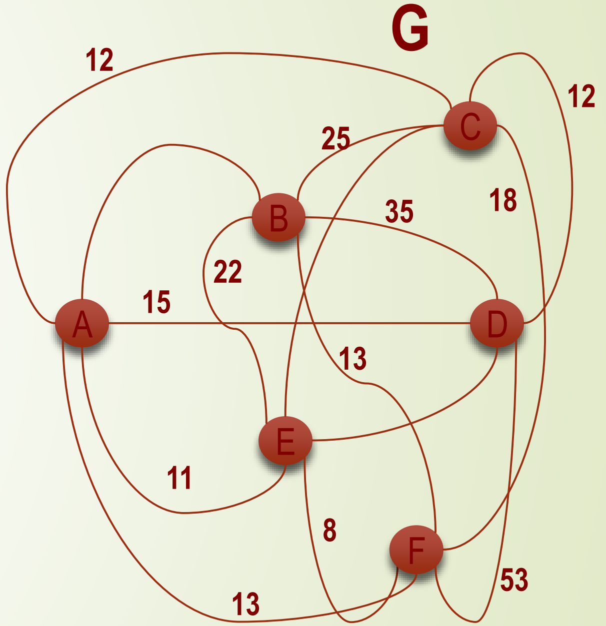
Teorema di Dirac
Condizione sufficiente (ma non necessaria) affinché un grafo con n vertici sia hamiltoniano: il grado di ogni vertice (cioè il numero di archi incidenti) deve essere maggiore o uguale a n / 2.

Il problema del commesso viaggiatore e i grafi hamiltoniani

(**TSP** : **T**ravelling **S**alesman **P**roblem)

Data una rete di città, connesse tramite delle strade, trovare il percorso di minore lunghezza che un commesso viaggiatore deve seguire per visitare tutte le città una e una sola volta?

Esiste un cammino hamiltoniano, la mappa è un grafo hamiltoniano?

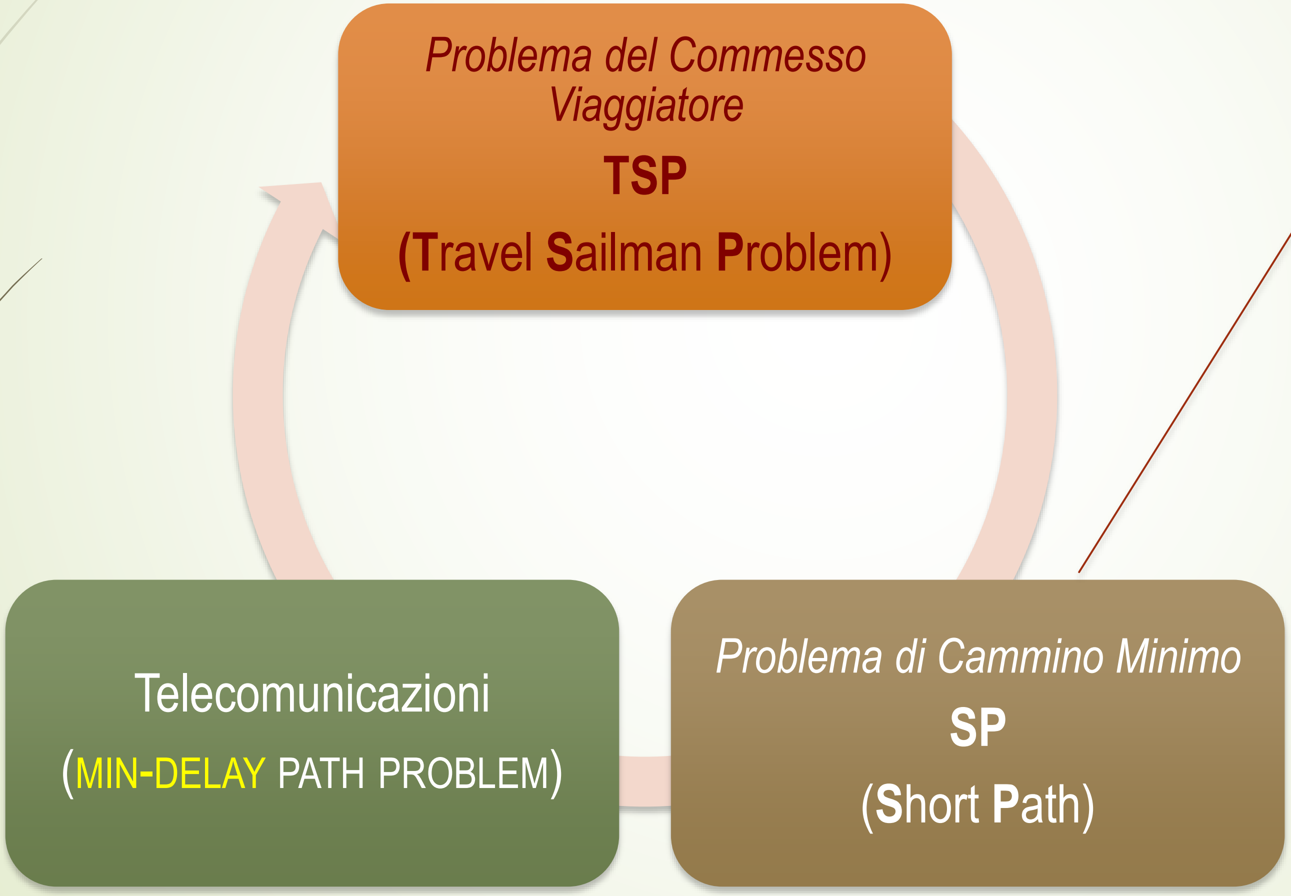


Problema tipico per lo studio dell'informatica teorica e **DELLA TEORIA DELLA COMPLESSITÀ** *(complessità descrittiva,* detta anche ***Teoria K-C-S*** da Kolmogorov, Chaitin e Solomonoff)

Rete di città rappresentata in **G**:

- **città** → *nodi*
- **strade** → *archi*
- **distanze** → *i pesi sugli archi*

Il problema del commesso viaggiatore: una classe di problemi



*«Dato un **grafo pesato** qual è il **cammino** che unisce 2 nodi dati che è minimo rispetto al valore della somma dei costi (pesi) associati a ciascun arco?»*

Short Path problem: soluzioni ed esempi

Ricerca di cammini con un solo nodo sorgente e archi pesati a valore non negativo

Algoritmo di **DIJKSTRA**

Algoritmi di tracciamento di rotta
PATH ALGORITHM

6 gradi di separazioni

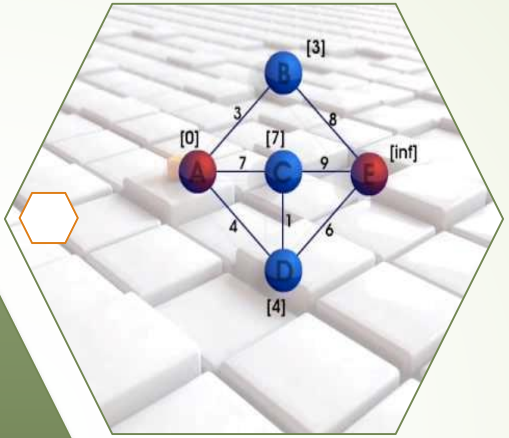
Racconto dello scrittore ungherese Frigyes Karinthy in Catene, 1929 nel volume Catene (Láncszemek)

Teoria del Piccolo Mondo

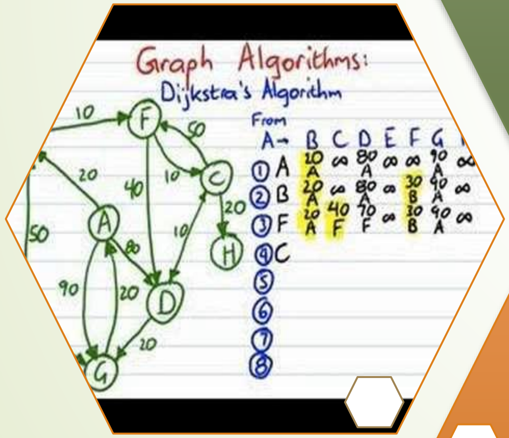
Branca della teoria dei grafi applicabile e utile, a studi riguardanti discipline come biologia, economia, informatica e sociologia (Stanley Milgram unghezza media del percorso per reti sociali tra residenti negli Stati Uniti).

2008: analisi su 30 miliardi di sessioni chat (Messenger) su 180.000.000 di persone, nel 78% dei casi la distanza media è 6,6 (max 29).

Short Path problem: Algoritmo di Dijkstra

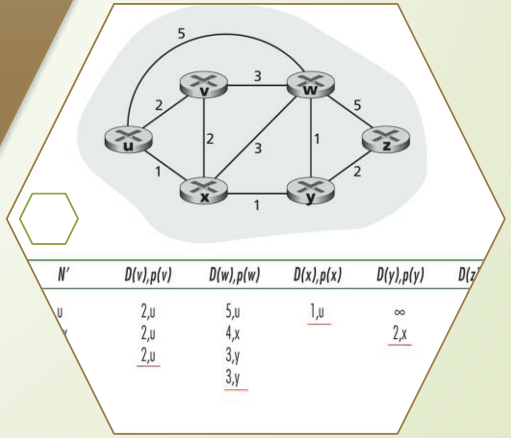


Esempio di applicazione: *la scelta della sequenza degli esami da sostenere all'università*



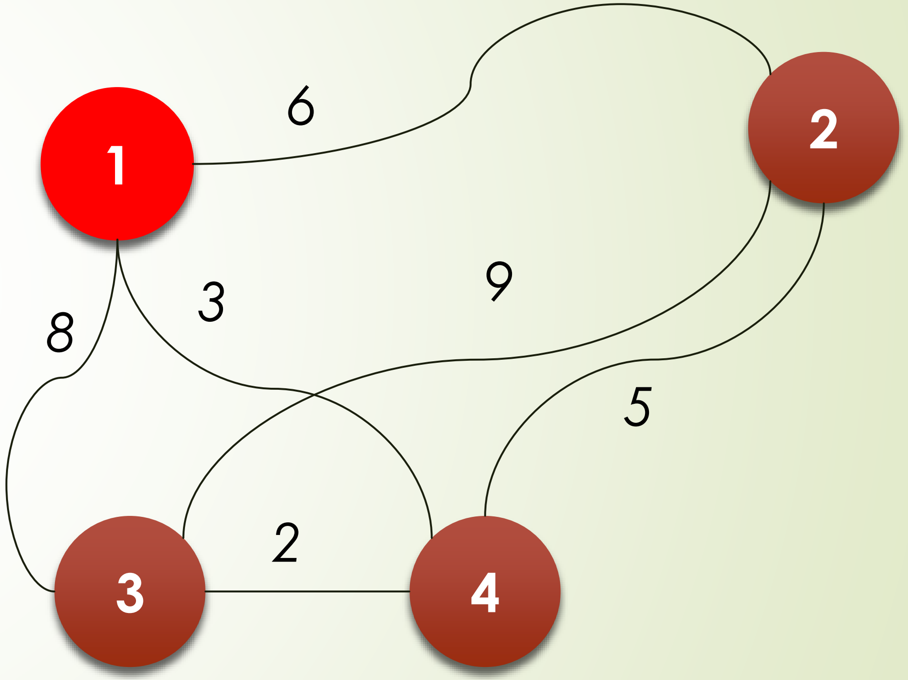
Trovare il percorso minimo tra due punti considerati rispettivamente partenza e arrivo: il più breve, il più rapido, il più economico…

Ottimizzare la realizzazione della rete idrica, collegamento, meno dispendioso, in termini di potenza dissipata, per realizzare un circuito elettrico.



Short Path problem: Algoritmo di Dijkstra

S={1}, T={2,3,4}
p(1,2) = 6
f(3)=8
J(3)=1



PREMESSE e NOTAZIONI

- *Grafo con n nodi distinti*
- *Nodi numerati (1 partenza, n arrivo)*
- *Archi "pesati" e indicato p(j,k)*
- *Etichetta f(i) peso del cammino per giungere al nodo i*
- *Peso di ogni arco >0*
- *Etichetta J(i) nodo che precede il nodo i nel cammino minimo*
- *S insieme dei nodi etichettati*
- *T l'insieme dei nodi non etichettati*

Short Path problem: Algoritmo di Dijkstra

DESCRIZIONE ALGORITMICA: (G GRAFO DI RIFERIMENTO)

INIZIALIZZAZIONE

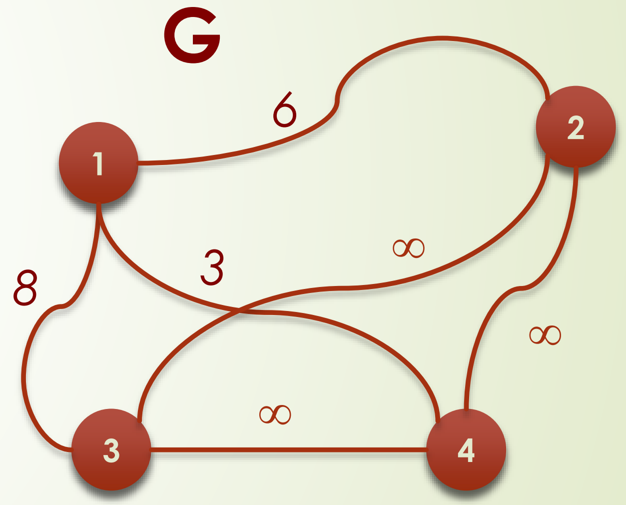
- **S={1}, T={2,3,4}, f(1)=0, J(1)=0**
- **f(i)=p(1,i), J(i)=1** *per tutti i nodi adiacenti a 1*
- **f(i) = ∞ (infinito)** *per tutti gli altri nodi*

ASSEGNAZIONE DI ETICHETTA PERMANENTE

- **Se f(i)= ∞ ,** per ogni **i in T ⇒ STOP**
- Si trova j per cui **f(j) = min f(i)** di tutti gli i in T
- **T=T-{j} e S=S∪{j}**
- **Se T=∅ STOP**

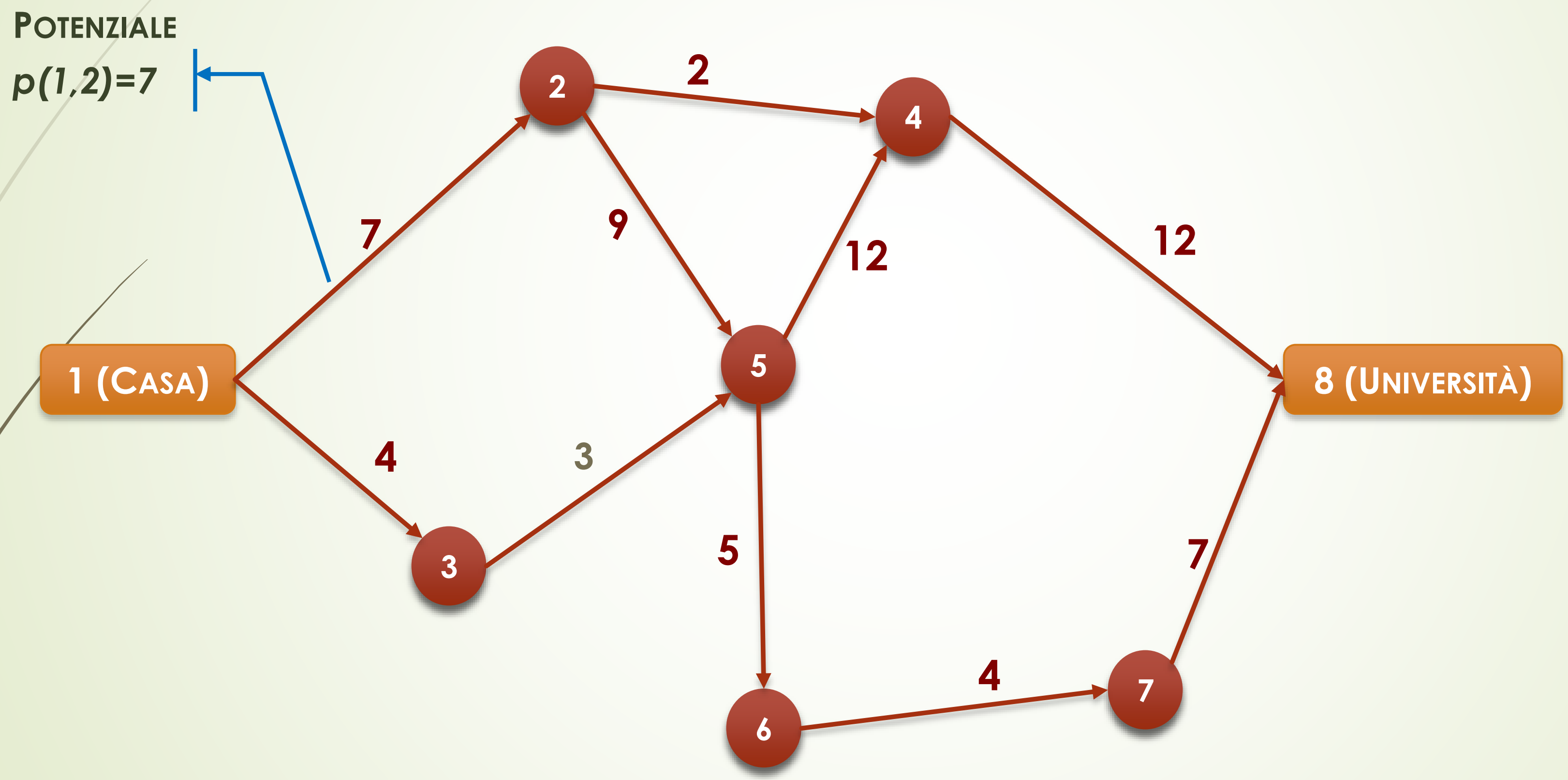
ASSEGNAZIONE DI ETICHETTA PROVVISORIA

- Per ogni **i** in **T,** adiacente a **j** per cui **f(i)>f(j)+p(i,j)**
  - *f(i) = f(j)+p(i,j)*
  - *J(i) = j*
- Si torna alla procedura **"ASSEGNAZIONE DI ETICHETTA PERMANENTE"**



Short Path problem: Algoritmo di Dijkstra

Percorso Casa-Università

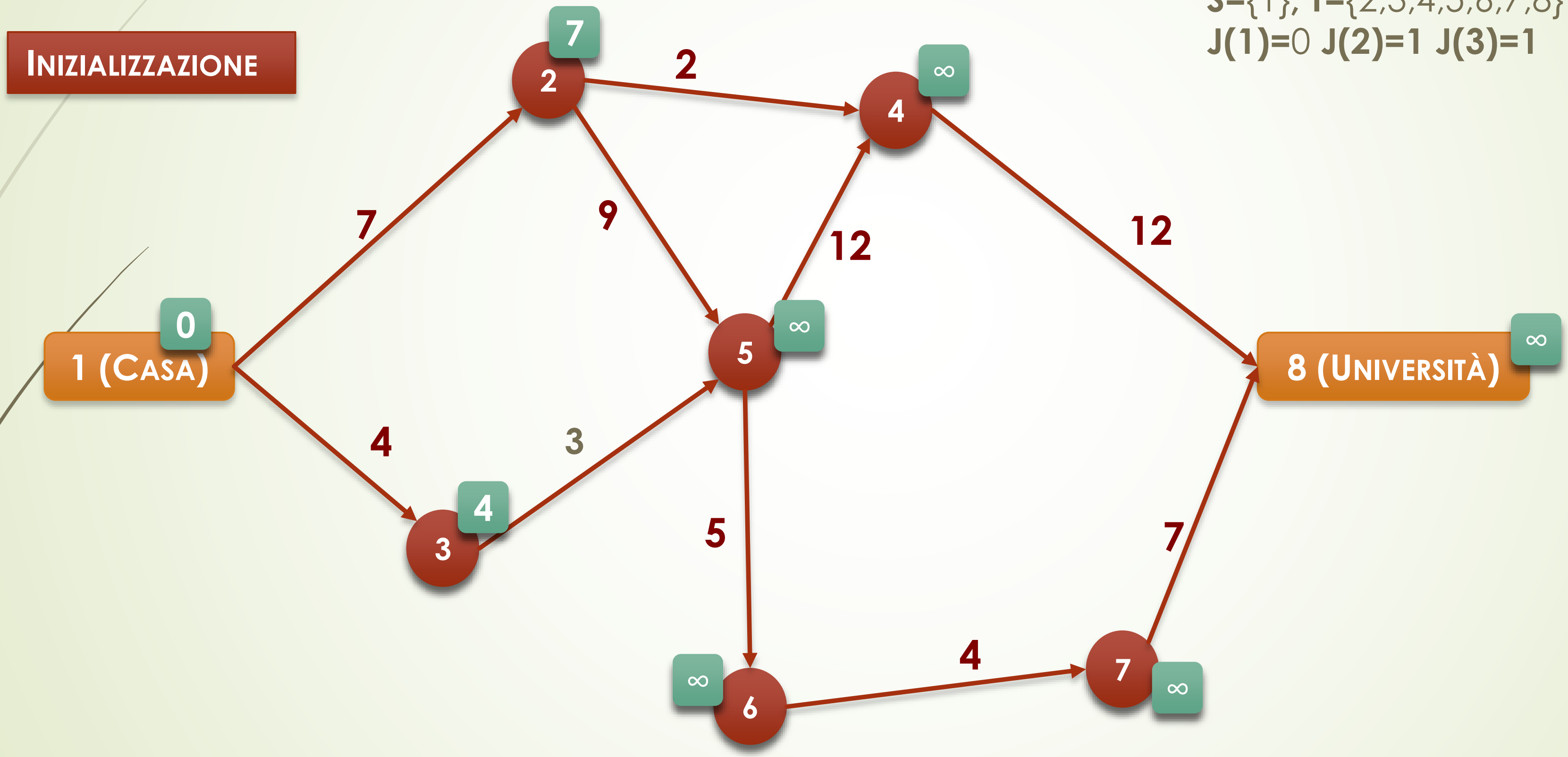


Grafo schema del problema

Short Path problem: Algoritmo di Dijkstra

Percorso Casa-Università

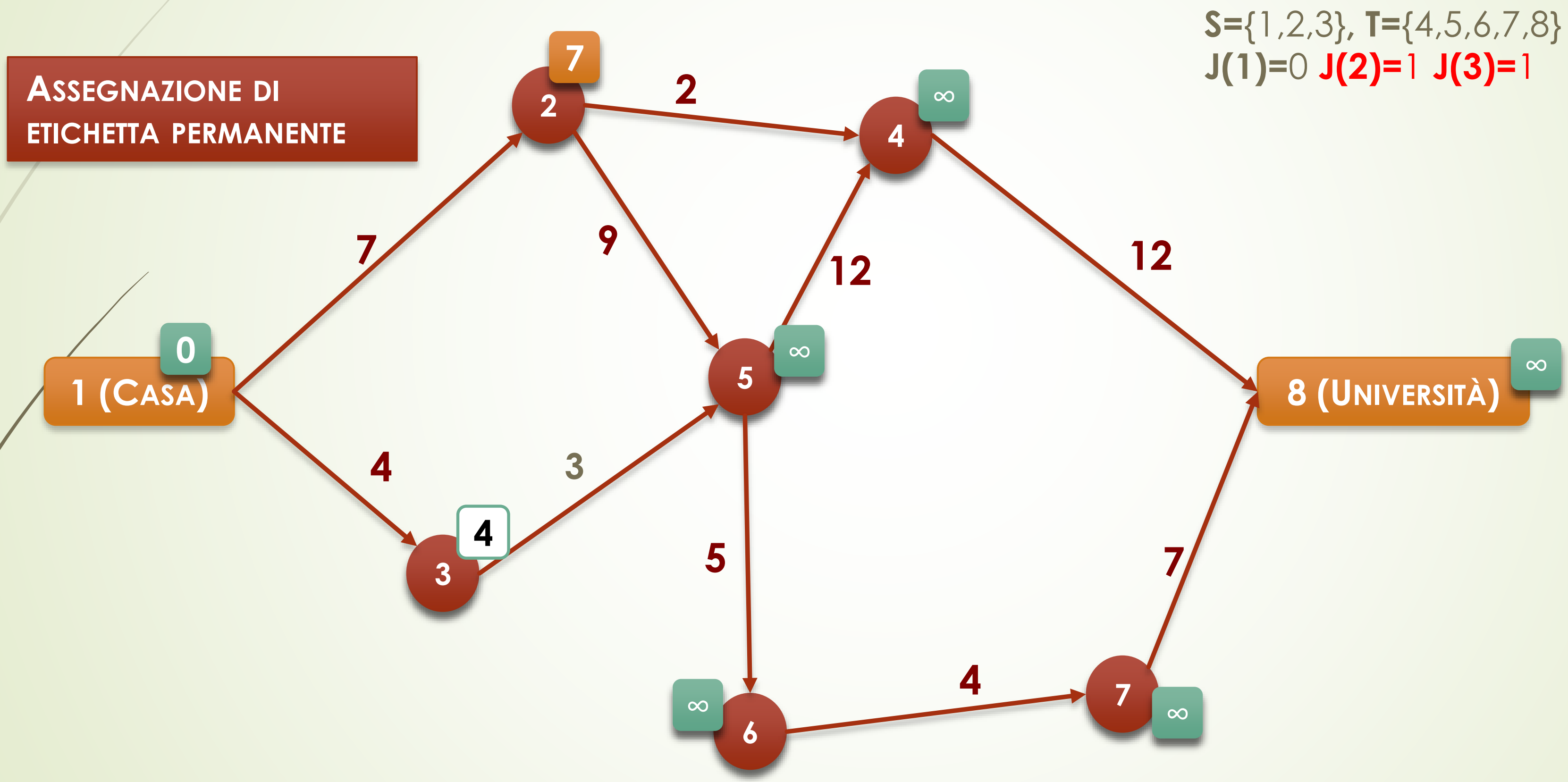
S={1}, T={2,3,4,5,6,7,8}
J(1)=0 J(2)=1 J(3)=1



Grafo schema del problema

Short Path problem: Algoritmo di Dijkstra

Percorso Casa-Università

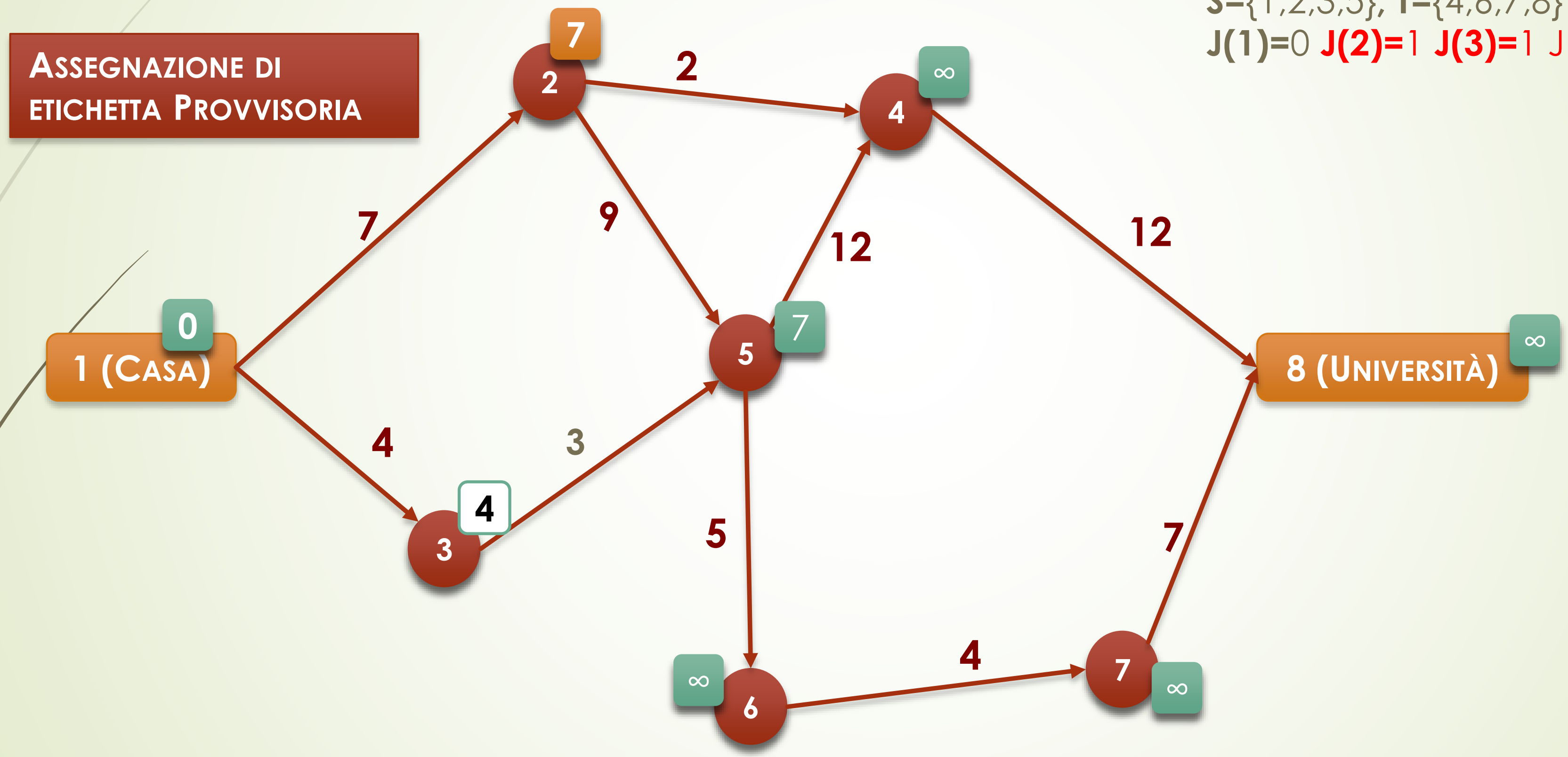


Grafo schema del problema

Short Path problem: Algoritmo di Dijkstra

Percorso Casa-Università

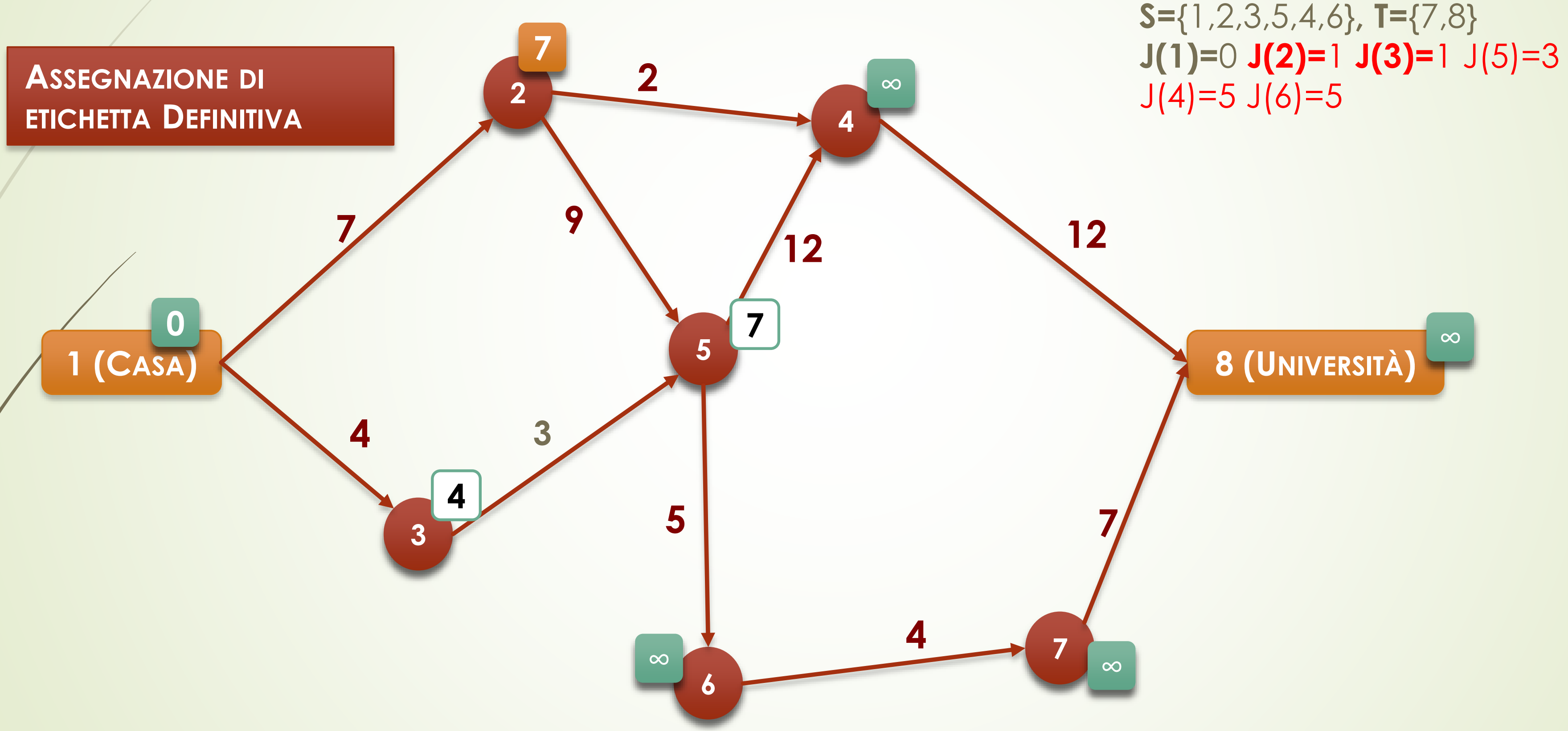
S={1,2,3,5}, T={4,6,7,8}
J(1)=0 J(2)=1 J(3)=1 J(5)=3



Grafo schema del problema

Short Path problem: Algoritmo di Dijkstra

Percorso Casa-Università

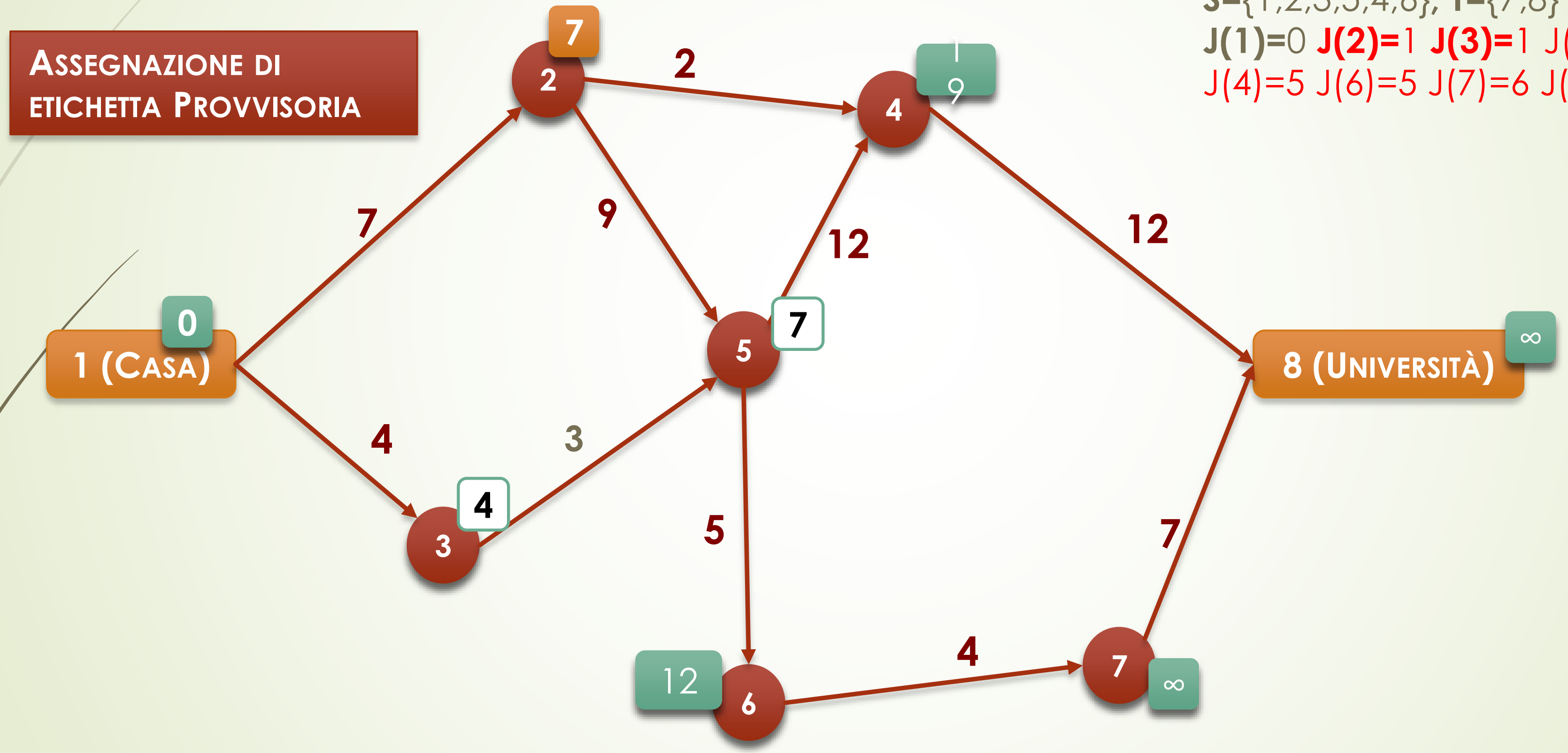


Grafo schema del problema

Short Path problem: Algoritmo di Dijkstra

Percorso Casa-Università

S={1,2,3,5,4,6}, T={7,8}
J(1)=0 J(2)=1 J(3)=1 J(5)=3
J(4)=5 J(6)=5 J(7)=6 J(8)=4

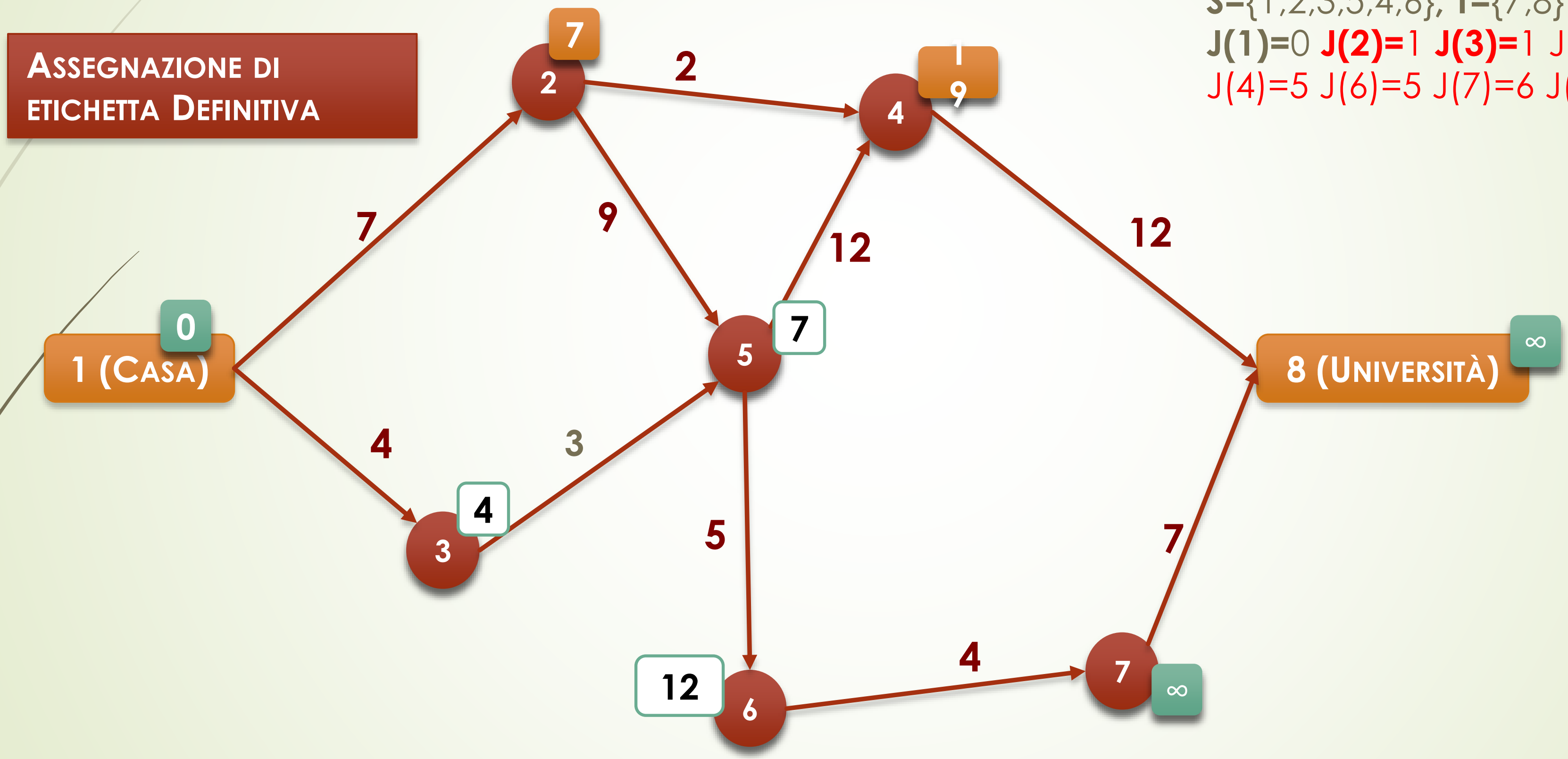


Grafo schema del problema

Short Path problem: Algoritmo di Dijkstra

Percorso Casa-Università

S={1,2,3,5,4,6}, T={7,8}
J(1)=0 J(2)=1 J(3)=1 J(5)=3
J(4)=5 J(6)=5 J(7)=6 J(8)=4



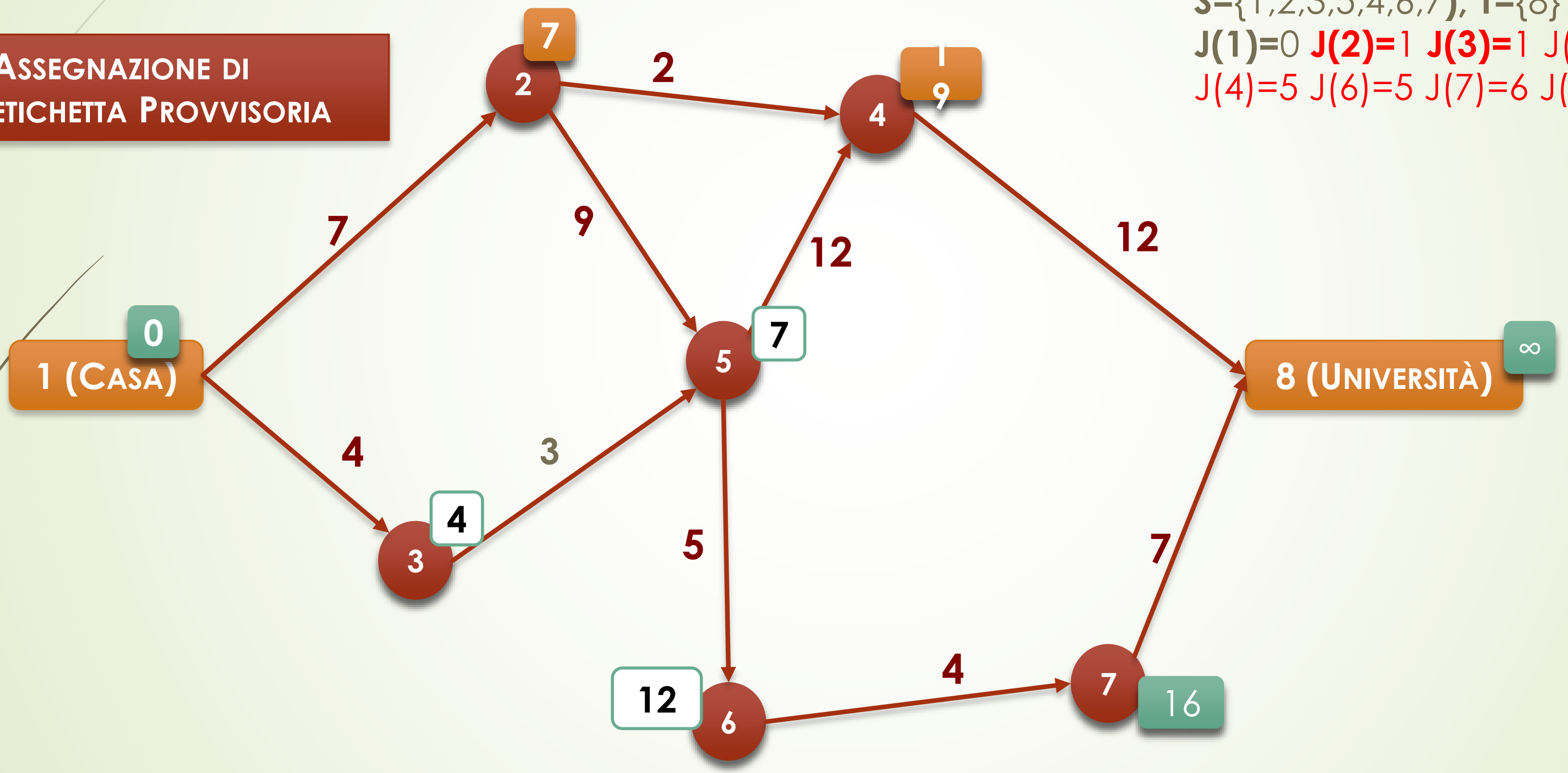
Grafo schema del problema

Short Path problem: Algoritmo di Dijkstra

Percorso Casa-Università

S={1,2,3,5,4,6,7), T={8}
J(1)=0 **J(2)=**1 **J(3)=**1 J(5)=3
J(4)=5 J(6)=5 J(7)=6 J(8)=4 J(8)=7

ASSEGNAZIONE DI ETICHETTA PROVVISORIA

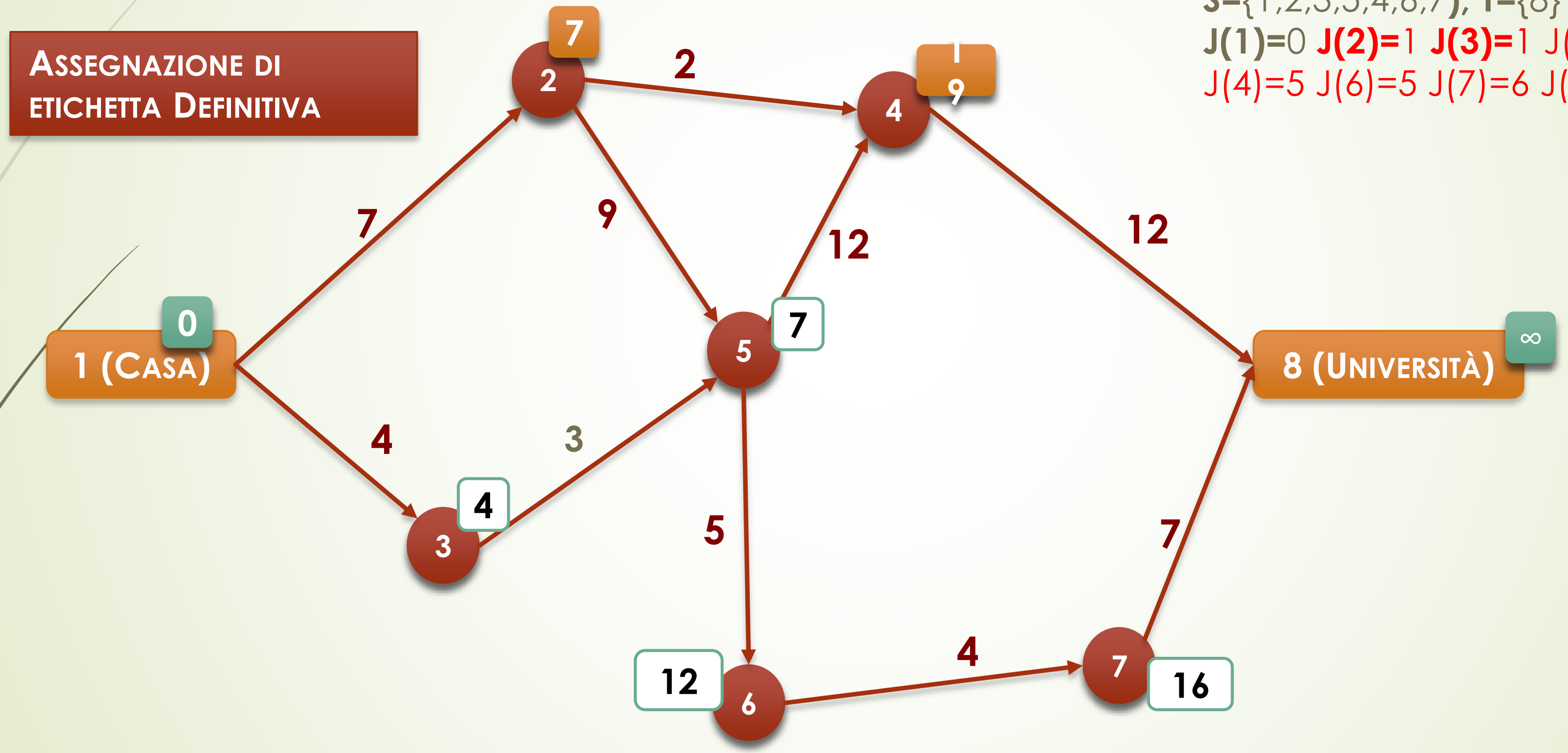


Grafo schema del problema

Short Path problem: Algoritmo di Dijkstra

Percorso Casa-Università

S={1,2,3,5,4,6,7}, T={8}
J(1)=0 J(2)=1 J(3)=1 J(5)=3
J(4)=5 J(6)=5 J(7)=6 J(8)=4 J(8)=7



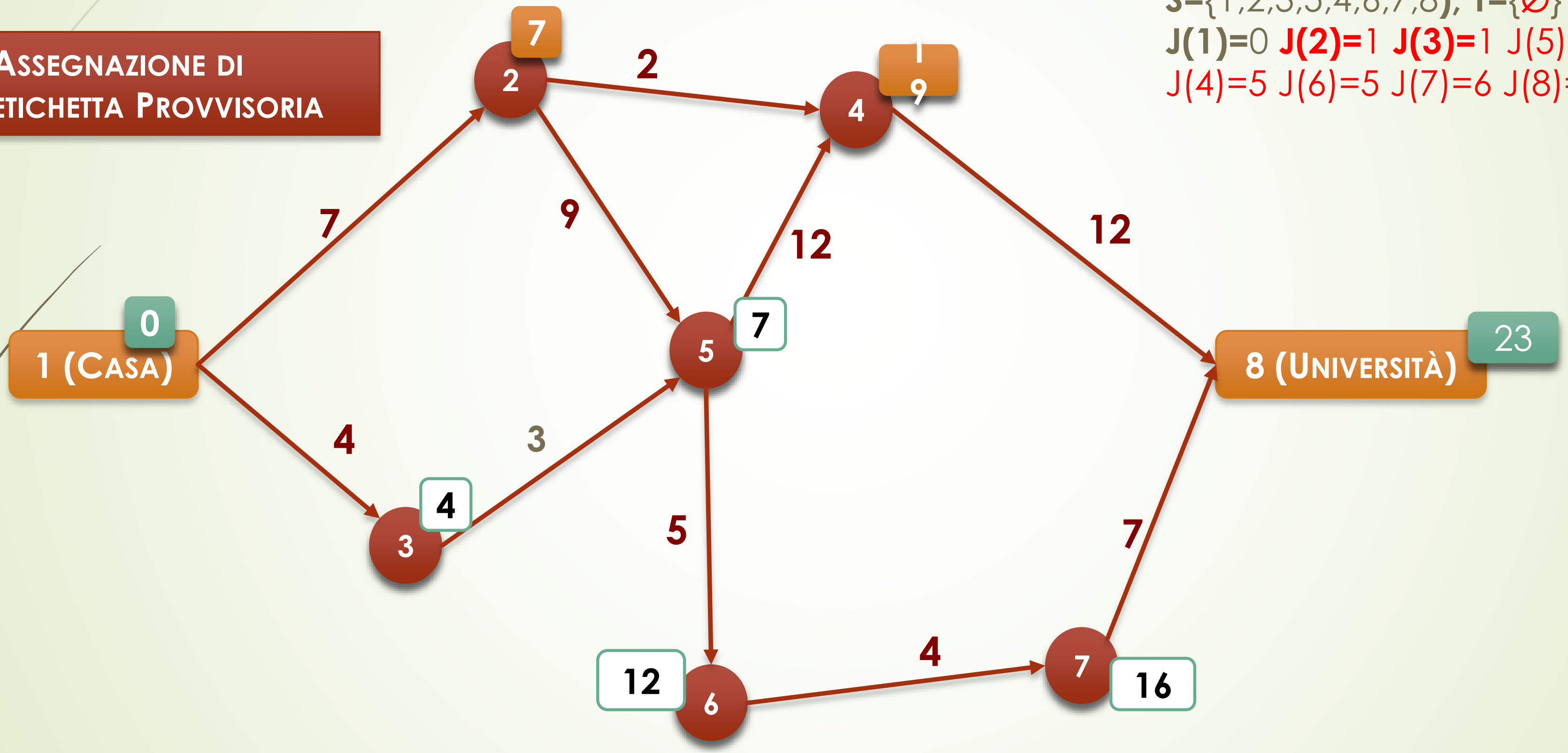
Grafo schema del problema

Short Path problem: Algoritmo di Dijkstra

Percorso Casa-Università

ASSEGNAZIONE DI ETICHETTA PROVVISORIA

S={1,2,3,5,4,6,7,8**)**, **T=**{∅}
J(1)=0 **J(2)=**1 **J(3)=**1 J(5)=3
J(4)=5 J(6)=5 J(7)=6 J(8)=4 J(8)=7

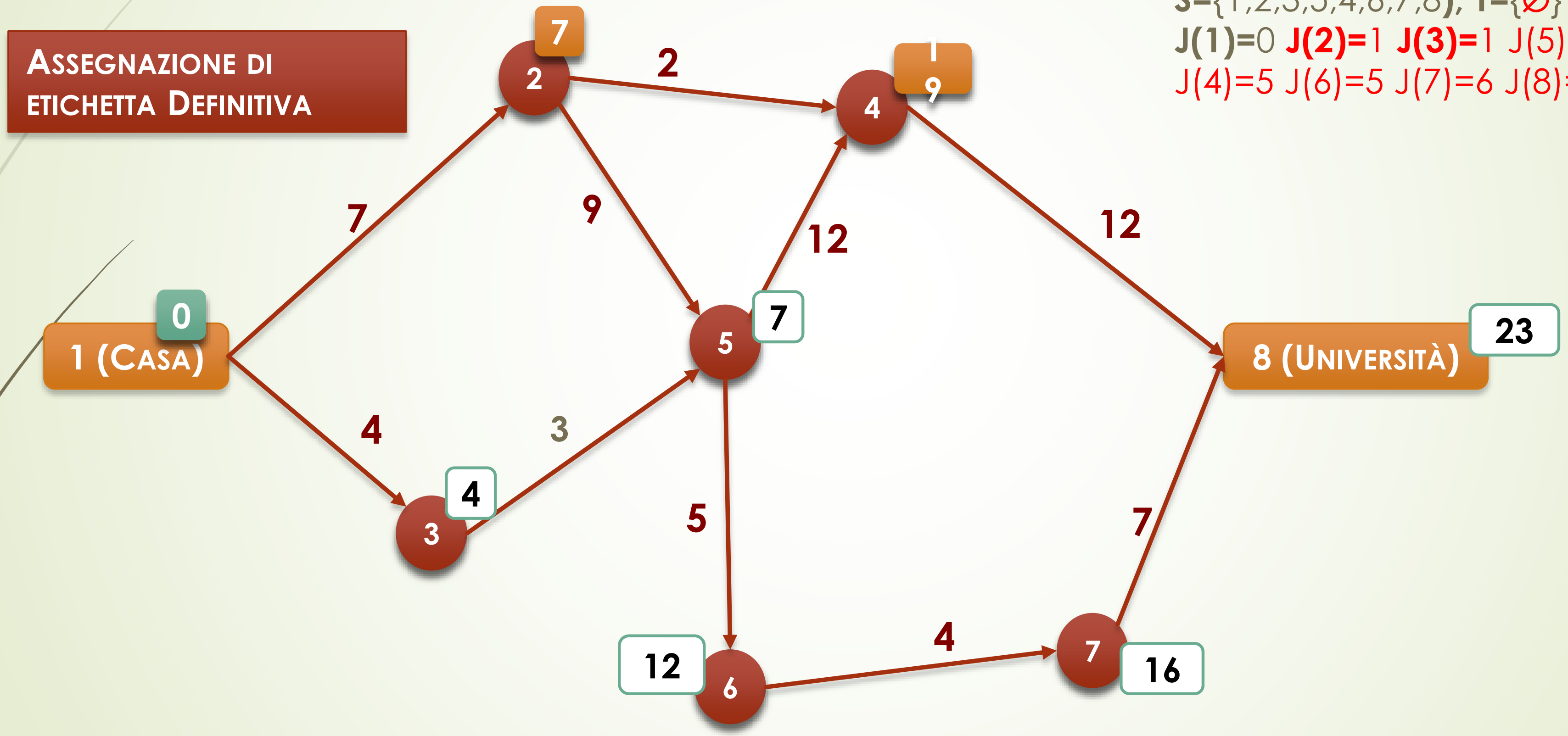


Grafo schema del problema

Short Path problem: Algoritmo di Dijkstra

Percorso Casa-Università

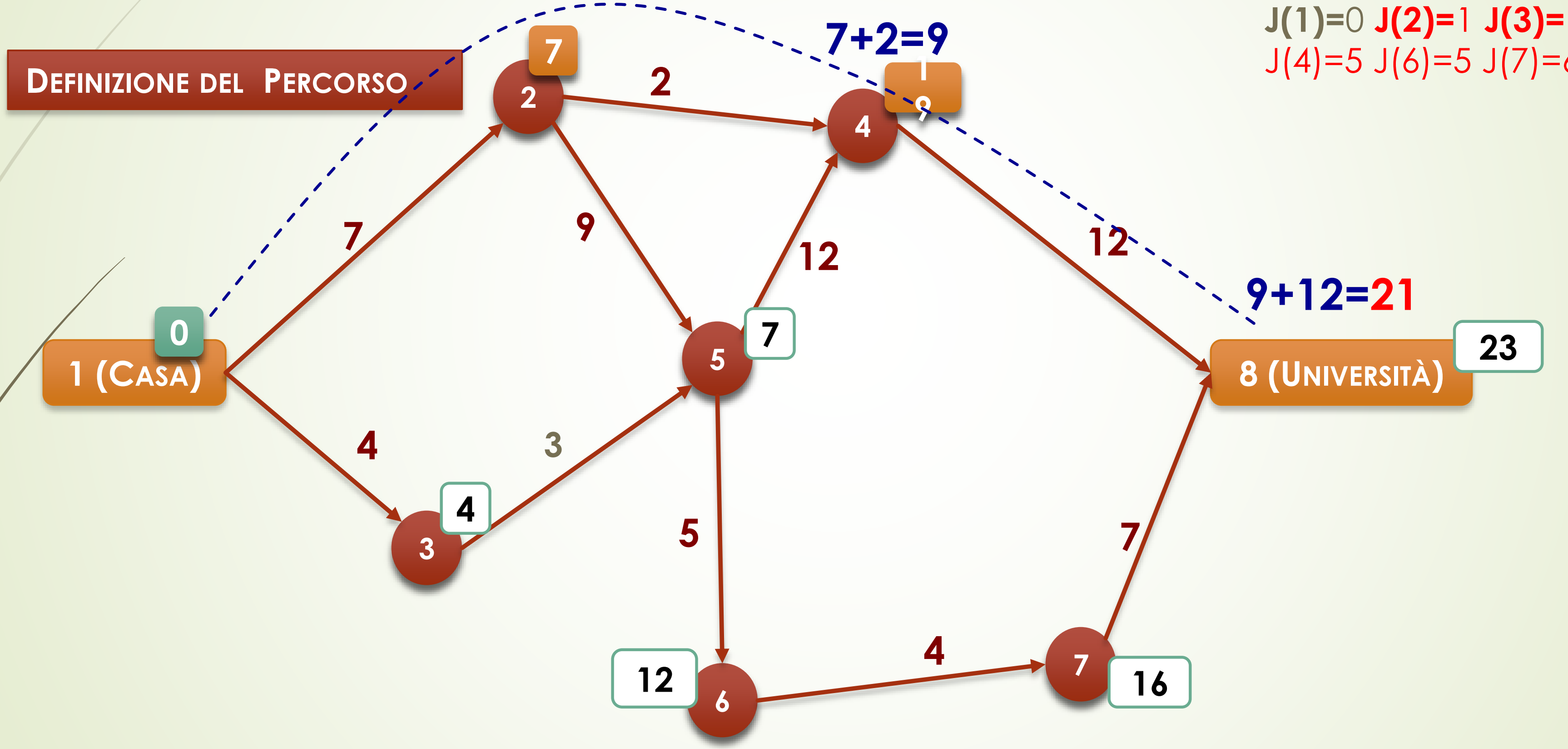
S={1,2,3,5,4,6,7,8}**)**, **T=**{∅}
J(1)=0 **J(2)=**1 **J(3)=**1 J(5)=3
J(4)=5 J(6)=5 J(7)=6 J(8)=4 J(8)=7



Grafo schema del problema

Short Path problem: Algoritmo di Dijkstra

Percorso Casa-Università



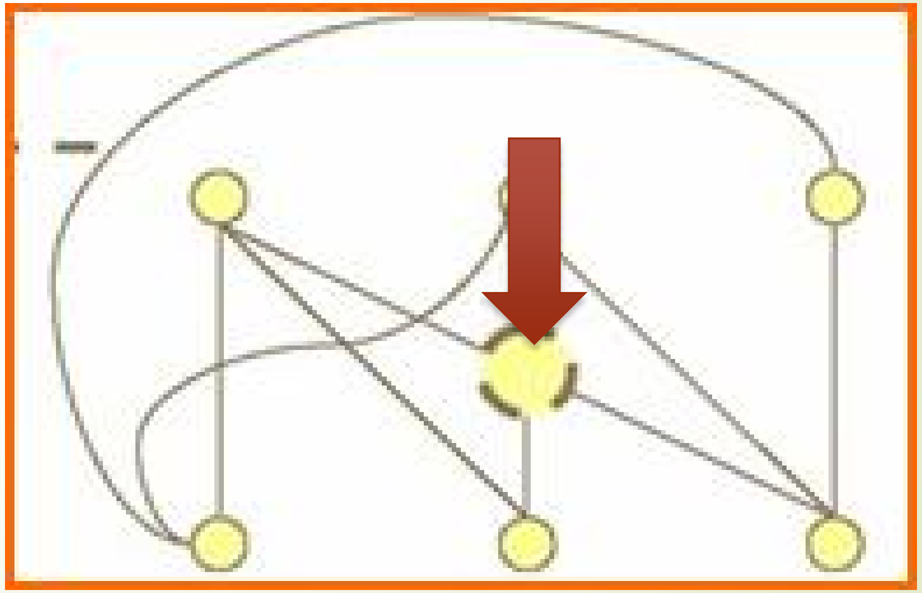
S={1,2,3,5,4,6,7,8}, T={∅}
J(1)=0 **J(2)=**1 **J(3)=**1 J(5)=3
J(4)=5 J(6)=5 J(7)=6 J(8)=4 J(8)=7

Percorso
1,3,5,6,7,8

Grafo schema del problema

Il problema delle tre case e delle tre forniture

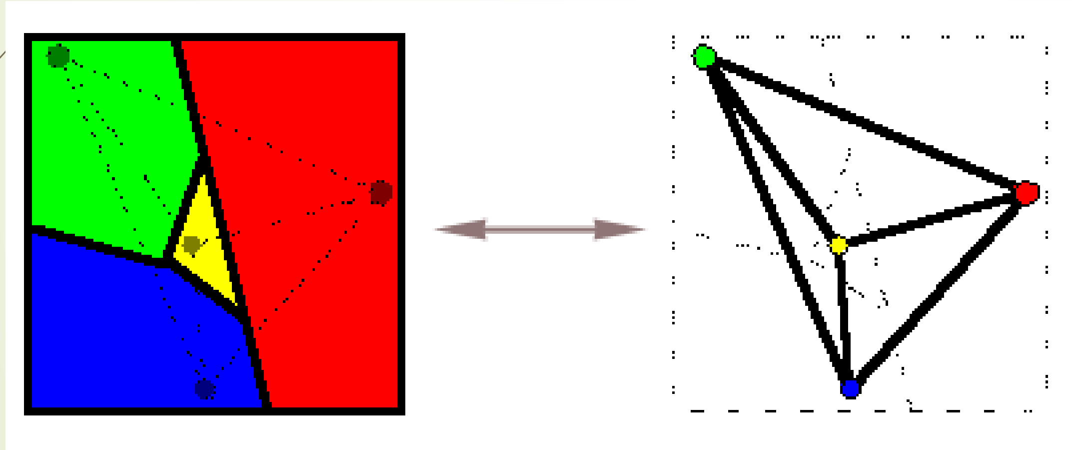
Su una pianura sono presenti una centrale idrica, una centrale elettrica ed una centrale del gas che devono rifornire tre case, anch'esse poste nella pianura. Ciascuna centrale utilizza delle linee di distribuzione (cavi elettrici, gasdotti ed idrodotti) interrate che, per motivi di sicurezza e manutenzione, non possono incrociare quelle di altre centrali. Posto che ciascuna casa deve essere fornita, mediante una linea propria, sia dell'acqua che del gas e della corrente elettrica, riesci a collegare ciascuna centrale a ciascuna casa senza che nessuna linea di distribuzione ne incroci un'altra?

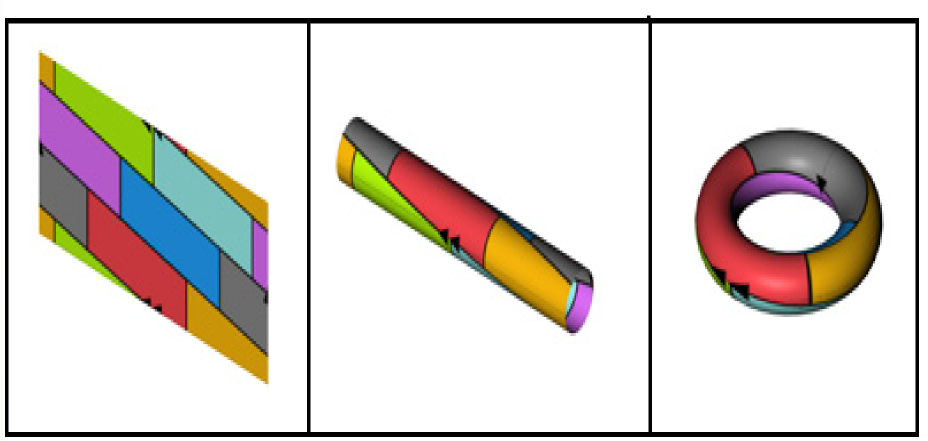


Teorema di Kazimierz Kuratowski

Il problema dei quattro colori

Data una superficie piana divisa in regioni connesse, come ad esempio una carta geografica politica, sono sufficienti quattro colori per colorare ogni regione facendo in modo che regioni adiacenti non abbiano lo stesso colore? (Due regioni sono dette adiacenti se hanno almeno un segmento di confine in comune)





Teoria dei grafi: i nodi di un grafo ***planare*** *possono essere colorati utilizzando al massimo quattro colori, in modo tale che due vertici adiacenti non ricevano mai lo stesso colore (ogni grafo planare è 4-colorabile)*

Il problema dei quattro colori

Congettura (dal latino *coniectūra*, dal verbo conīcere, ossia "*interpretare, dedurre, concludere*") è una affermazione o un giudizio fondato sull'***intuito***.

La dimostrazione si basa sulla riduzione del numero infinito di mappe possibili a 1.936 configurazioni (poi ulteriormente ridotte a 1.476). Qualsiasi mappa si può ridurre numero finito di topologie "***notevoli***".

1852 - **Congettura** di Francis Guthrie

Allievo Augustus De Morgan

Prima pubblicazione di Arthur Cayley

1879 - Prima dimostrazione Alfred Kempe

1880 - Peter Teit annuncia una dimostrazione definitiva

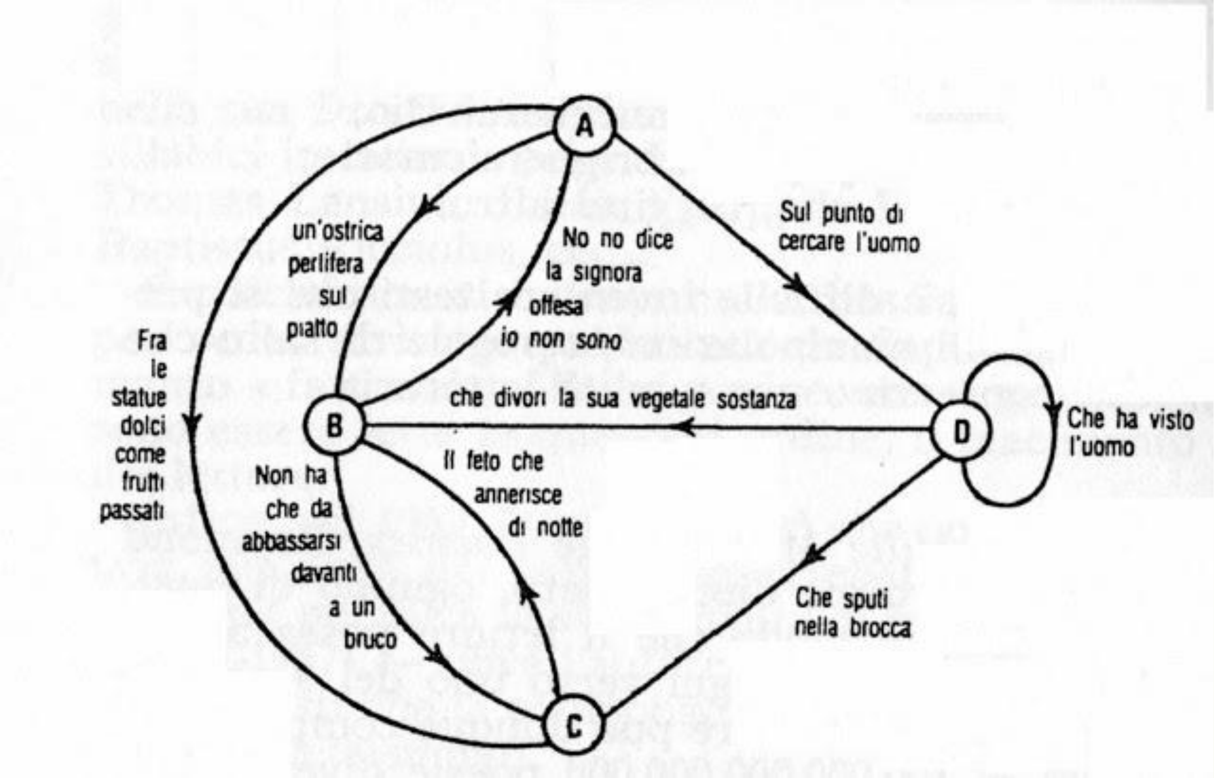
1890 Percy Heawood rileva errore nella dimostrazione di Kempe e dimostra 5 colori

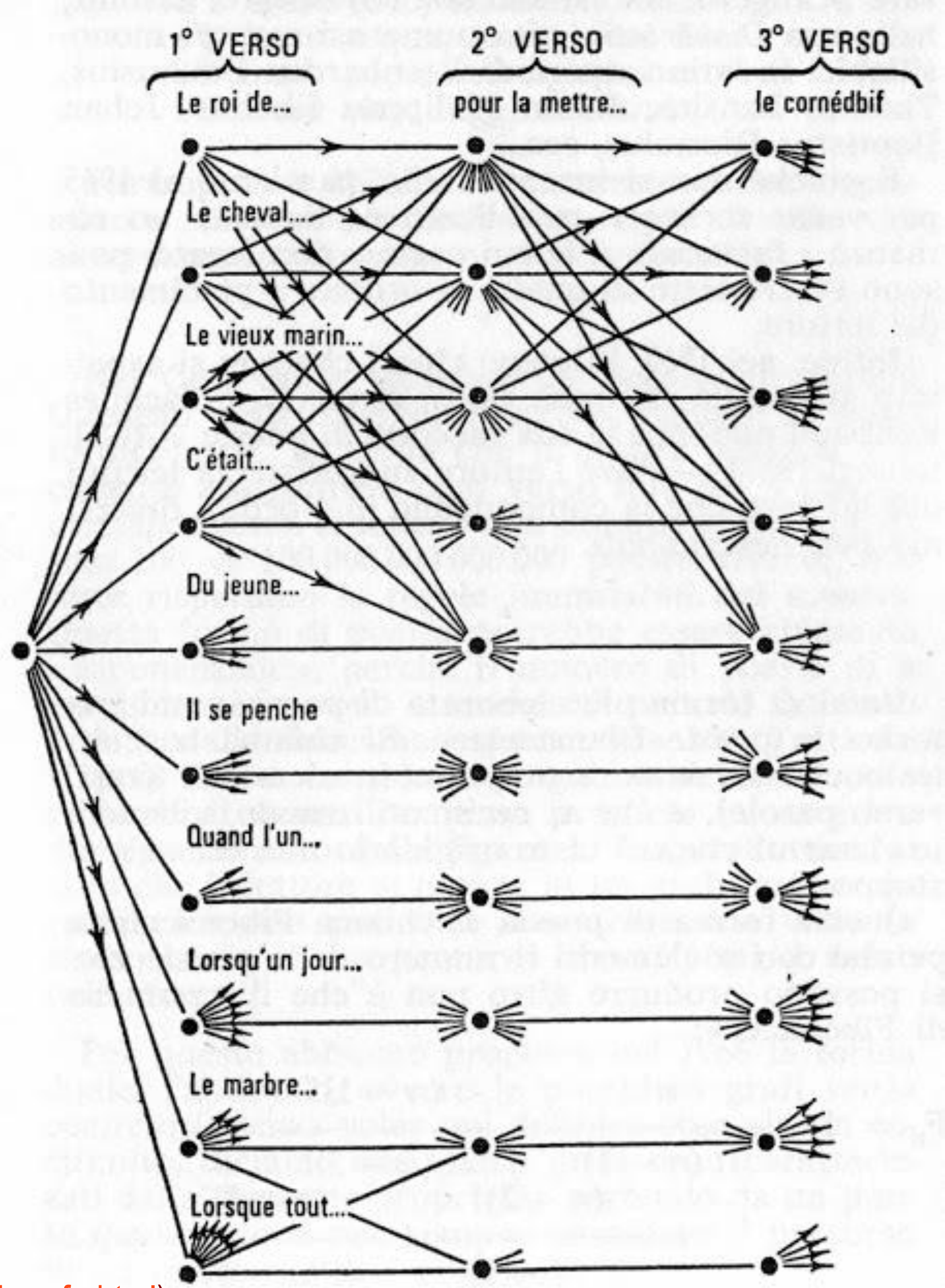
1891- Jullius Petersen rileva errore nella dimostrazione di Peter

1977 – Dimostrazione definitiva dei 4 colori Kenneth Appel e Wolfgang Haken

Grafi e poesie

Grafo per "poesie hamiltoniane"
(da http://keespopinga.blogspot.it/2012/02/poesia-in-forma-di-grafo.html)





Grafo semplificato dell'opera di Raymond Queneau
(da http://keespopinga.blogspot.it/2012/02/poesia-in-forma-di-grafo.html)