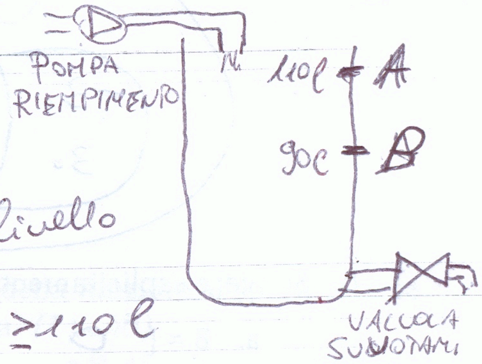
11/12/2012 Prova scritta di matematica Parte I – Scienze e Tecnologie per i Beni Culturali

Cognome e Nome ……………………………………………… Matricola ……………………………………………

CORREZIONE

1. **LOGICA** *(6 punti)*

Un serbatoio raccoglitore di acqua piovana deve essere mantenuto ad un livello costante, entro l'intervallo 90 litri – 110 litri. A tale scopo il serbatoio e' munito di una valvola di troppo pieno che si deve aprire per scaricare l'acqua quando il livello supera i 110 litri e si richiude quando il livello scende sotto i 110 litri. Vi e' inoltre una pompa ausiliaria che deve riempire il serbatoio quando il livello scende sotto i 90 litri e il riempimento si deve interrompe quando il livello supera i 90 litri. Due sensori di livello sono posizionati in corrispondenza dei 90 litri e dei 110 litri. I sensori di livello forniscono, ciascuno, un segnale VERO quando il livello e' maggiore o uguale al livello corrispondente, FALSO quando il livello e' inferiore.
Determinare l'espressione algebrica delle funzioni booleane che, usando le informazioni dai sensori, controllano la pompa ausiliaria (FR = funzione di riempimento) e la valvola di troppo pieno (FS = funzione di svuotamento).



- Chiamiamo A la var booleana corrispondente al sensore di livello a 110l
- B la var booleana corrisp. al livello 90 l.

$$\Rightarrow \quad A = \begin{cases} \text{Vero} & \text{se Livello} \geq 110\,l \\ \text{Falso} & \text{se Livello} < 110\,l \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} V & \text{se Livello} \geq 90\,l \\ F & \text{se Livello} < 90\,l. \end{cases}$$

MODO I

$$FR = \begin{cases} V & \text{se Liv} < 90\,l \\ F & \text{se Liv} \geq 90\,l \end{cases} \Rightarrow FR = \overline{B}$$

$$FS = \begin{cases} V & \text{se Liv} \geq 110\,l \\ F & \text{se Liv} < 110\,l \end{cases} \Rightarrow FS = A$$

MODO II

* notare che $FS = A$ e $FR = \overline{B}$

A	B	FR	FS
V	V	F	V
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

$$FR = \underbrace{A\overline{B}}_{\text{non si verifica mai}} \vee \overline{A}\,\overline{B} = \overline{B}\,\underbrace{(A \vee \overline{A})}_{V} = \overline{B} \Rightarrow FR = \overline{B}$$

$$FS = AB \vee \underbrace{A\overline{B}}_{\text{non si verifica mai}} = A\,\underbrace{(B \vee \overline{B})}_{V}$$

$$\Rightarrow FS = A$$

Cognome e Nome .... Matricola ....

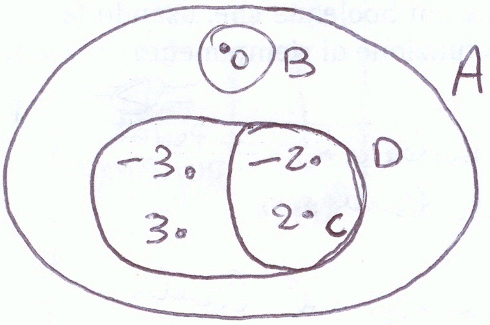
2. INSIEMI *(4 punti)*

Dati i seguenti insiemi:

$A = \{x \in \mathbb{Z}, -10 \leq x \leq +10\} \quad B = \{x \in \mathbb{Z}, x = -x\}$

$C = \left\{x \in \mathbb{Z}, \frac{|x|}{2} = 1\right\} \qquad D = \{x \in \mathbb{Z}, x^2 = 9 \vee x^2 = 4\}$

a. Rappresentare graficamente i quattro insiemi. *(2 punti)*



b. Scrivere esplicitamente gli elementi degli insiemi B, C e D: *(1 punti)*

a. B = { 0 }

b. C = { −2 , 2 }

c. D = {−2, 2, −3, 3}

c. Scrivere esplicitamente gli elementi dell'insieme $C \cap D$ = { −2 , 2 } *(1 punti)*

3. Studio dei FUNZIONE *(16 punti)*

Data la funzione $$f(x) = 2 \cdot e^{-2x} - \frac{1}{4} \cdot e^{-4x}$$

a. Determinare il dominio della funzione *(1 punti)*

$D = \mathbb{R}$ in quanto le esponenziali sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

b. Determinare l'intersezione con l'asse x e fare lo studio del segno della funzione *(1 punti)*

$f(x)>0 \quad 2e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-4x} > 0. \quad \underbrace{e^{-2x}}_{\text{sempre}>0}\left(2 - \frac{1}{4}e^{-2x}\right) > 0$

$\Rightarrow 2 - \frac{1}{4}e^{-2x} > 0 \quad 2 > \frac{1}{4e^{2x}} \quad e^{2x} > \frac{1}{8} \quad 2x > \ln\frac{1}{8}$

$\Rightarrow f(x) > 0$ per $x > \frac{1}{2}\ln\frac{1}{8}$

$f(x) < 0$ per $x < \frac{1}{2}\ln\frac{1}{8} \Rightarrow f(x) = 0$ per $x_0 = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{8}$

$x \approx -1{,}04$

11/12/2012 Prova scritta di matematica Parte I – Scienze e Tecnologie per i Beni Culturali

Cognome e Nome .... Matricola ....

c. Potrebbero esserci asintoti verticali? Giustificare la risposta *(1 punti)*

No perché non ci sono punti in cui la f(x) non è definita.

d. Determinare gli eventuali asintoti orizzontali *(2 punti)*

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{e^{-2x}}_{\to 0}\left(2-\frac{1}{4}\underbrace{e^{-2x}}_{\to 0}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{e^{-2x}}_{\to+\infty}\left(2-\frac{1}{4}\underbrace{e^{-2x}}_{\to+\infty}\right) = +\infty(-\infty) = -\infty$$

e. Scrivere la derivata prima della funzione *(2 punti)*

$$f'(x) = -4e^{-2x} + e^{-4x}$$

f. Ricercare eventuali punti critici (massimi e/o minimi) della funzione e specificare se sono massimi o minimi con lo studio della derivata prima. *(1 punti)*

$f'(x)>0 \quad -4e^{-2x}+e^{-4x}>0 \quad \underbrace{e^{-2x}}_{>0 \text{ sempre}}(-4+e^{-2x})>0$

$\Rightarrow -4+e^{-2x}>0 \quad e^{-2x}>+4 \quad e^{2x}<\frac{1}{4} \quad 2x<\ln\frac{1}{4}$

$\Rightarrow f'(x)>0$ per $x_1<\frac{1}{2}\ln\frac{1}{4}$ $[-\infty, x_1]$ CRESCENTE $\nearrow$ $\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{4}$

$f'(x)<0$ per $x_1>\frac{1}{2}\ln\frac{1}{4}$ $[x_1,+\infty]$ DECRESCENTE $\searrow$ punto critico in cui $f'(x)=0$ x_0 è un punto di MAX.

$x_1 \simeq -0{,}69$

g. Scrivere la derivata seconda. *(2 punti)*

$$f''(x) = 8e^{-2x} - 4e^{-4x}$$

h. Con la derivata seconda confermare quanto determinato al punto f *(2 punti)*

se $f''(x_1)<0 \Rightarrow x_0$ è un punto di MAX.

$$f''(x_1) = 8e^{-2\frac{1}{2}\ln\frac{1}{4}} - 4e^{-4\frac{1}{2}\ln\frac{1}{4}} = \frac{8}{\underbrace{e^{\ln\frac{1}{4}}}_{=\frac{1}{4}}} - \frac{4}{\underbrace{e^{\ln(\frac{1}{4})^2}}_{=(\frac{1}{4})^2}} = 4\cdot 8 - 4\cdot 16 = 32-64=-32<0$$

$\Rightarrow$ sì x_1 è un punto di MAX.

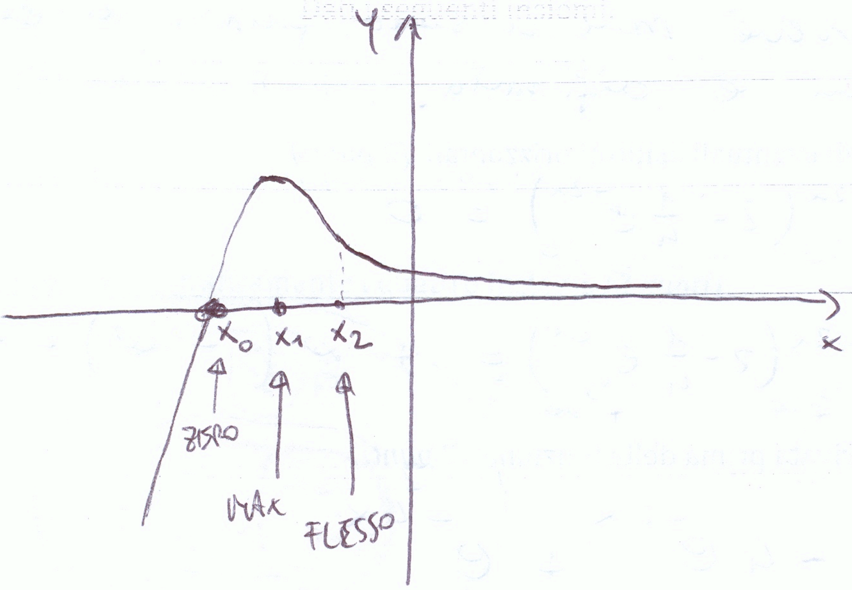
i. Ricercare eventuali punti di flesso *(1 punti)*

$f''(x)=0 \quad \underbrace{e^{-2x}}_{>0 \text{ sempre}}(8-4e^{-2x})=0 \Rightarrow 2\cancel{8}-\cancel{4}e^{-2x}=0 \quad e^{-2x}=2$

$e^{2x}=\frac{1}{2} \quad 2x=\ln\frac{1}{2} \quad x_2=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$ è punto di flesso.

$x_2 \simeq -0{,}35$

j. Tracciare un grafico qualitativo della funzione *(3 punti)*



4. **Integrale** *(4 punti)*

a. *(3 punti)* Calcolare l'integrale indefinito della funzione $f(x) = 2 \cdot e^{-2x} - \frac{1}{4} \cdot e^{-4x}$

$$F(x) = \int \left(2e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-4x}\right)dx = 2\underbrace{\int e^{-2x}dx} - \frac{1}{4}\underbrace{\int e^{-4x}dx}$$

$$\int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} \qquad \int e^{-4x}dx = -\frac{1}{4}e^{-4x}$$

$$\Rightarrow \quad F(x) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}e^{-4x}\right) = -e^{-2x} + \frac{1}{16}e^{-4x}$$

b. *(1 punti)* Calcolare il valore dell'integrale definito $\int_0^{+\infty} f(x)$

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(0) =$$

$$= \left(\underbrace{-e^{-\infty}}_{=0} + \frac{1}{16}\underbrace{e^{-\infty}}_{=0}\right) - \left(-\underbrace{e^{0}}_{=1} + \frac{1}{16}\underbrace{e^{0}}_{=1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{15}{16} \simeq 0{,}94$$

Altra soluzione dell'esercizio di logica.

Nei metodi indicati a pagina 1 per la risoluzione dell'esercizio di logica si fanno controllare le FR e FS esclusivamente prendendo rispettivamente i valori dei sensori L90 e L110. In questa ipotesi si assume che la combinazione L90 = F e L110 = V non si possa verificare, in quanto indicazione di anomalia e si considera quindi solo il fatto che L110 sia V per far partire lo svuotamento.

Un'analisi piu' corretta sarebbe proprio quella di considerare questa configurazione possibile, ma indicazione di un'anomalia. Essendo un caso di anomalia potrebbero essere i sensori a non funzionare bene, quindi e' una combinazione in cui non si deve svolgere alcuna azione, quindi ne' svuotamento ne' riempimento, perche' non ci e' dato sapere quale sensore sbaglia la lettura. Sotto queste altre ipotesi possiamo quindi costruire le nuove funzioni FR e FS con le seguenti tavole della verita'.

$L90$	$L110$	FR	FS
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	V	F

Dalla precedente tavola della verita' dobbiamo pero' evidenziare che sia FR che FS rimangono false in corrispondenza della combinazione L90 = F e L110 = V, in quanto combinazione anomala. Le funzioni sono quindi:

$$FR = \overline{L90} \wedge \overline{L110}$$
$$FS = L90 \wedge L110$$

Da notare che le due funzioni NON SONO una la negata dell'altra.