11/02/2013 Prova scritta di matematica Parte I – Scienze e Tecnologie per i Beni Culturali

Cognome e Nome .... Matricola ....

1. **<u>LOGICA</u>** *(6 punti)*

L'interno di una teca deve essere mantenuto entro un intervallo di temperatura:

$$18\ °C < Ta < 20\ °C$$

Due sensori di temperatura termostatici (S1 ed S2) forniscono un segnale booleano Vero quando le temperature superano rispettivamente i 18 °C e i 20 °C.

$$S1 = \begin{cases} V\ se\ Ta < 18\ °C \\ F\ se\ Ta > 18\ °C \end{cases} \qquad S2 = \begin{cases} V\ se\ Ta < 20\ °C \\ F\ se\ Ta > 20\ °C \end{cases}$$

Determinare l'espressione della funzione booleana FR che controlla il sistema di raffreddamento, la quale deve essere vera quando deve attivarsi il sistema di raffreddamento. Determinare inoltre la funzione booleana FA che indichi lo stato di anomalia, determinato una configurazione non permessa dei sensori S1 ed S2.

T_a

$S1 = F \quad S2 = F$

20°C

$S1 = F \quad S2 = V$

18°C

$S1 = V \quad S2 = V$

$$FR = \begin{cases} V & T_a > 20\ °C \\ F & T_a < 20\ °C \end{cases}$$

S_1	S_2	FR	FA
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	F	F
F	F	V	F

$$FR = \overline{S_1} \wedge \overline{S_2}$$

$$FA = S_1 \wedge \overline{S_2}$$

11/02/2013 Prova scritta di matematica Parte I – Scienze e Tecnologie per i Beni Culturali

Cognome e Nome .... Matricola ....

2. INSIEMI *(4 punti)*

Dati i seguenti insiemi:

$A = \{x \in \mathbb{Z}, -10 \leq x \leq +10\}$ $B = \{x \in \mathbb{Z}, \quad x^2 = 9\}$

$C = \left\{x \in \mathbb{Z}, \quad \frac{|x|}{5} = -1\right\}$ $D = \{x \in \mathbb{Z}, \quad 2x = 6\}$

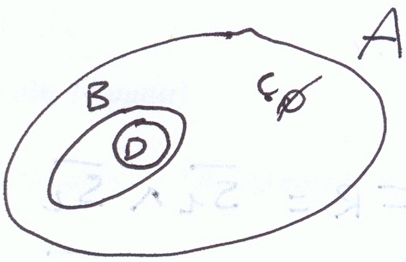
a. Scrivere esplicitamente gli elementi degli insiemi B, C e D: *(1 punti)*

a. B = { -3 ; $+3$ }

b. C = { $\emptyset$ } insieme vuoto

c. D = { $+3$ } $2x = 6 \quad x = \frac{6}{2} = 3$

b. Rappresentare graficamente i quattro insiemi. *(2 punti)*



c. Scrivere esplicitamente gli elementi dell'insieme $B \cap D = \{$ $+3$ $\}$ *(1 punti)*

3. Studio dei FUNZIONE *(16 punti)*

Data la funzione $f(x) = x^3 - x^2$

a. Determinare il dominio della funzione *(1 punti)*

Dominio $\mathbb{R}$

b. Determinare l'intersezione con l'asse x e fare lo studio del segno della funzione *(1 punti)*

$f(x) = 0 \quad x^3 - x^2 = 0 \quad x^2(x-1) = 0$

$\begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x_0 = 0 \\ x - 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1 \end{cases}$

SEGNO $x^2(x-1) > 0$

$x^2 > 0 \quad \forall x$

$x - 1 > 0 \quad x > 1$

x^2: + + + + + +

$(x-1)$: − − − − − 1 + + + +

$f(x)$: − +

$\begin{cases} f(x) > 0 & x > 1 \\ f(x) < 0 & x < 1 \end{cases}$

11/02/2013 Prova scritta di matematica Parte I – Scienze e Tecnologie per i Beni Culturali

Cognome e Nome .... Matricola ....

c. Potrebbero esserci asintoti verticali? Giustificare la risposta *(1 punti)*

No perchè non ci sono punti di non definizione nel dominio.

d. Determinare gli eventuali asintoti orizzontali e indicare l'andamento a $\pm\infty$ *(2 punti)*

$$\lim_{x\to+\infty} x^3-x^2 = \lim_{x\to+\infty} x^2(x-1) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2(x-1) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

NO ASINTOTI ORIZZONTALI.

e. Scrivere la derivata prima della funzione *(2 punti)*

$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$

f. Ricercare eventuali punti critici (massimi e/o minimi) della funzione e specificare se sono massimi o minimi con lo studio della derivata prima. *(1 punti)*

$$f'(x) = 0 \quad 3x^2 - 2x = 0$$

$$x(3x-2) = 0$$

$$\begin{cases} x'_0 = 0 \\ x'_1 = \dfrac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{matrix} x'_0 = MAX \\ x'_1 = MIN \end{matrix}$$

$x(3x-2) > 0$

		0		$\frac{2}{3}$	
$x > 0$	$- - - -$		$+$		$+ + + +$
$3x-2$	$- - - -$		$-$		$+ + + + +$
$f'(x)$	$+ + + +$		$- - -$		$+ + + + +$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

g. Scrivere la derivata seconda. *(2 punti)*

$$f''(x) = 6x - 2$$

h. Con la derivata seconda confermare quanto determinato al punto f *(2 punti)*

$$f''(x'_0) = -2 < 0 \Rightarrow x'_0 \ MAX$$

$$f''(x'_1) = \cancel{6}^{2} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} - 2 = 4 - 2 = 2 > 0 \Rightarrow x'_1 \ MIN$$

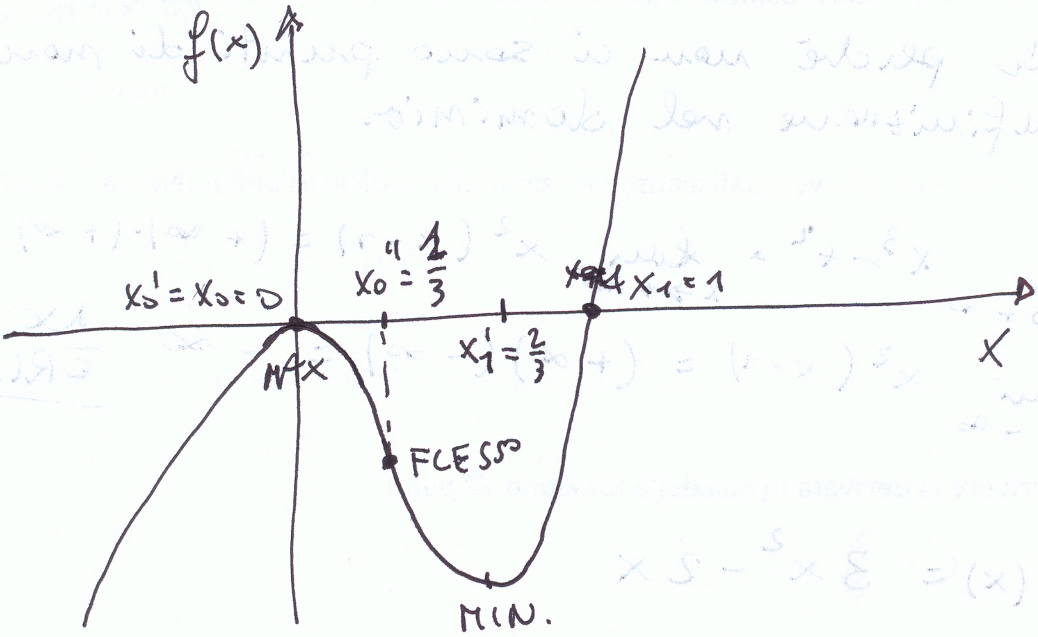
i. Ricercare eventuali punti di flesso *(1 punti)*

$$f''(x) = 0 \qquad 6x - 2 = 0 \qquad x''_0 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

11/02/2013 Prova scritta di matematica Parte I – Scienze e Tecnologie per i Beni Culturali

Cognome e Nome .... Matricola ....

j. Tracciare un grafico qualitativo della funzione *(3 punti)*



4. **Integrale** *(4 punti)*

a. *(3 punti)* Calcolare l'integrale indefinito della funzione $f(x) = x^3 - x^2$

$$\int (x^3 - x^2)\, dx = \int x^3 dx - \int x^2 dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C$$

b. *(1 punti)* Calcolare il valore dell'integrale definito $\int_0^1 f(x)$

$$\int_0^1 (x^3 - x^2)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{3-4}{12} = -\frac{1}{12}$$