28/01/2013 Prova scritta di matematica Parte I – Scienze e Tecnologie per i Beni Culturali

Cognome e Nome ………………………………………….. Matricola ……………………………………..

1. **<u>LOGICA</u>** *(6 punti)*

L'interno di una teca deve essere mantenuto entro un intervallo di temperatura:

$$18\,°C < Ta < 20\,°C$$

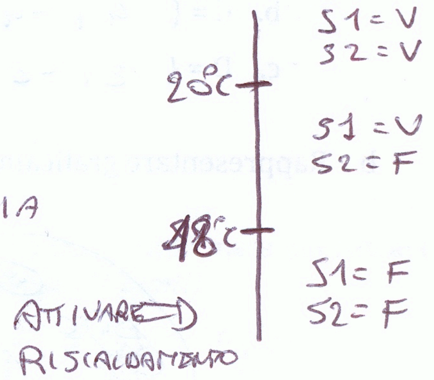
Due sensori di temperatura termostatici (S1 ed S2) forniscono un segnale booleano Vero quando le temperature superano rispettivamente i 18 °C e i 20 °C.

$$S1 = \begin{cases} V \; se \; Ta > 18\,°C \\ F \; se \; Ta < 18\,°C \end{cases} \qquad S2 = \begin{cases} V \; se \; Ta > 20\,°C \\ F \; se \; Ta < 20\,°C \end{cases}$$

Determinare l'espressione della funzione booleana FR che controlla il sistema di riscaldamento la quale deve essere vera quando il sistema deve riscaldare. Determinare inoltre la funzione booleana FA che indichi lo stato di anomalia, determinato una configurazione non permessa dei sensori S1 ed S2.

S1	S2	FR	FA
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	F	V ← ANOMALIA
F	F	V	F

Anomalia



$FR = \overline{S1} \wedge \overline{S2}$ nella configurazione di anomalia lasciamo il riscaldatore spento.

$FA = \overline{S1} \wedge S2$

28/01/2013 Prova scritta di matematica Parte I – Scienze e Tecnologie per i Beni Culturali

Cognome e Nome ………………………………………………. Matricola ……………………………………….

2. INSIEMI *(4 punti)*

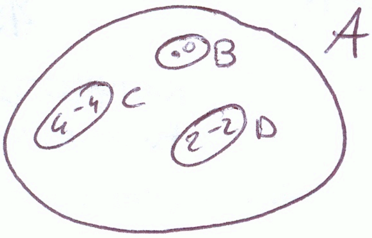
Dati i seguenti insiemi:

$A = \{x \in \mathbb{Z}, -10 \leq x \leq +10\}$ $B = \left\{x \in \mathbb{Z}, \frac{x}{10} = 0\right\}$

$C = \left\{x \in \mathbb{Z}, \frac{|x|}{4} = 1\right\}$ $D = \{x \in \mathbb{Z}, x^3 = 8 \vee x^2 = 4\}$

a. Scrivere esplicitamente gli elementi degli insiemi B, C e D: *(1 punti)*
   a. B = { 0 }
   b. C = { 4 , −4 }
   c. D = { 2 , −2 }

b. Rappresentare graficamente i quattro insiemi. *(2 punti)*



c. Scrivere esplicitamente gli elementi dell'insieme $C \cap D = \{$ $\emptyset$ $\}$ *(1 punti)*

INSIEME VUOTO

3. Studio dei FUNZIONE *(16 punti)*

Data la funzione
$$f(x) = -2 \cdot x^2 + \frac{1}{4} \cdot x$$

a. Determinare il dominio della funzione *(1 punti)*

$\mathbb{R}$

b. Determinare l'intersezione con l'asse x e fare lo studio del segno della funzione *(1 punti)*

$-2x^2 + \frac{1}{4}x \geq 0$

$\overset{A}{x}\overbrace{\left(-2x + \frac{1}{4}\right)}^{B} \geq 0$

B) $-2x + \frac{1}{4} \geq 0$ $-x \geq -\frac{1}{8}$

$x \leq \frac{1}{8}$

A ------ 0 + + + + + + +

B + + + + + + + + $1/8$ - - - - -

$f(x) = A \cdot B$ ------ + + ------

0 $1/8$

INTERSEZIONI

$x_1 = 0$ $x_2 = 1/8$

SEGNO

$f(x) \begin{cases} > 0 & 0 < x < \frac{1}{8} \\ < 0 & x < 0 \text{ e } x > 1/8 \end{cases}$

28/01/2013 Prova scritta di matematica Parte I – Scienze e Tecnologie per i Beni Culturali

Cognome e Nome ………………………………………… Matricola ………………………………………

c. Potrebbero esserci asintoti verticali? Giustificare la risposta *(1 punti)*

No perché non ci sono punti di non definizione nel dominio.

d. Determinare gli eventuali asintoti orizzontali e indicare l'andamento a $\pm\infty$ *(2 punti)*

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(-2x+\frac{1}{2}\right) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(-2x+\frac{1}{2}\right) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

NO ASINTOTI ORIZZONTALI.

e. Scrivere la derivata prima della funzione *(2 punti)*

$$f(x) = -2x^2 + \frac{1}{4}x$$

$$f'(x) = -4x + \frac{1}{4}$$

f. Ricercare eventuali punti critici (massimi e/o minimi) della funzione e specificare se sono massimi o minimi con lo studio della derivata prima. *(1 punti)*

$f'(x) = 0 \qquad -4x + \frac{1}{4} = 0 \qquad x = +\frac{1}{16}$ PUNTO CRITICO

$f'(x) > 0 \qquad -x > -\frac{1}{16} \qquad x < \frac{1}{16}$

$f'(x) < 0 \qquad \longrightarrow \qquad x > \frac{1}{16}$

PUNTO DI MASSIMO.

g. Scrivere la derivata seconda. *(2 punti)*

$$f'(x) = -4x + \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = -4$$

h. Con la derivata seconda confermare quanto determinato al punto f *(2 punti)*

$$f''\Big(\underbrace{x=\frac{1}{16}}_{\text{costante per ogni } x}\Big) = -4 < 0 \Rightarrow \text{PUNTO DI MASSIMO}$$

i. Ricercare eventuali punti di flesso *(1 punti)*

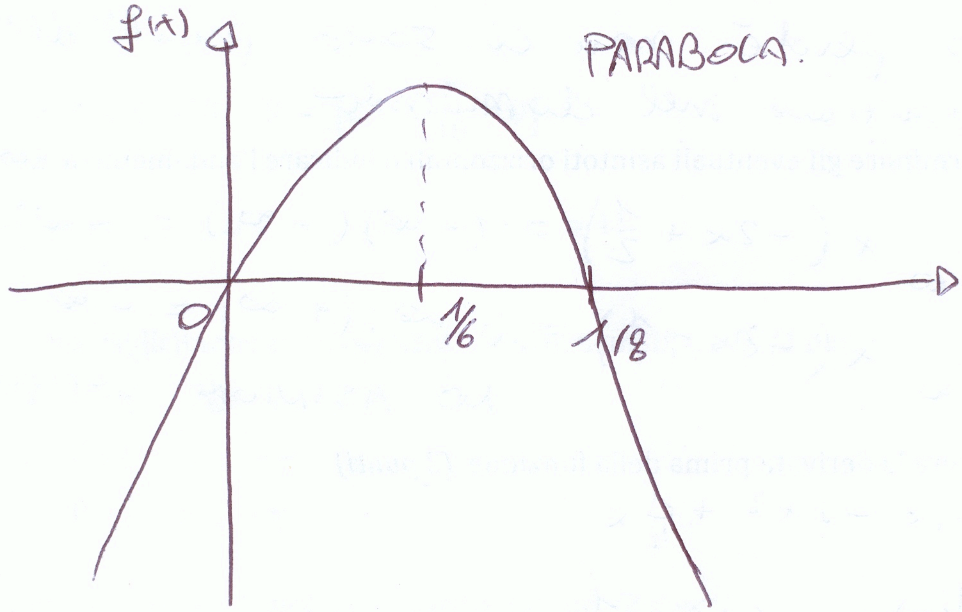
$f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ essendo $f''(x) = -4$ costante.

$\Rightarrow$ non ci sono punti di flesso.

28/01/2013 Prova scritta di matematica Parte I – Scienze e Tecnologie per i Beni Culturali

Cognome e Nome .... Matricola ....

j. Tracciare un grafico qualitativo della funzione *(3 punti)*



4. Integrale *(4 punti)*

a. *(3 punti)* Calcolare l'integrale indefinito della funzione $f(x) = -2 \cdot x^2 + \frac{1}{4} \cdot x$

$$\int -2x^2 + \frac{1}{4}x \, dx = -2 \int x^2 dx + \frac{1}{4} \int x \, dx =$$

$$= -2\left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2}\right) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^2$$

$$F(x) = \int f(x)\,dx = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^2$$

b. *(1 punti)* Calcolare il valore dell'integrale definito $\int_0^{1/8} f(x)$

$$\int_0^{1/8} f(x)\,dx = \cancel{-\tfrac{2}{3}} F\left(\frac{1}{8}\right) - F(0) = F\left(\frac{1}{8}\right) =$$

$$= -\frac{2}{3}\,\frac{1}{8^3} + \frac{1}{8}\,\frac{1}{8^2} = -\frac{2}{3}\,\frac{1}{8^3} + \cancel{1}\,\frac{1}{8^3} = \frac{1}{8^3}\left(-\frac{2}{3} + 1\right)$$

$$= \cancel{\frac{1}{8^3}\left(\frac{-4+3}{6}\right) \ldots} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8^3} = \frac{1}{1536}$$