28/01/2013 Prova scritta di matematica Parte II – Scienze e Tecnologie per i Beni Culturali

Cognome e Nome ……………………………………………… Matricola ………………………………………

1. **Sistemi lineari** *(8 punti)*

Un gruppo di perone compra contemporaneamente delle galline. Se ogni persona pagasse 9 Euro, il venditore dovrebbe rendere un resto un resto complessivo di 11 Euro. Se ogni persona desse solamente 6 Euro, ci sarebbe un ammanco di 6 Euro. Quante persone ci sono nel gruppo e qual e' il costo totale delle galline? Risolvere il sistema con il metodo di Cramer.

N = n° di persone

C = costo complessivo delle galline.

$$\begin{cases} 9 \cdot N = C + 11 \leftarrow \text{RESTO} \\ 6 \cdot N = C - 6 \leftarrow \text{AMMANCO} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9N - C = 11 \\ 6N - C = -6 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \quad (A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 9 & -1 & 11 \\ 6 & -1 & -6 \end{array}\right)$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -9 + 6 = -3$$

$$\det(A_N) = \begin{vmatrix} 11 & -1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = -11 - 6 = -17$$

$$\det(A_C) = \begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = -54 - 66 = -120$$

$$\begin{cases} N = \dfrac{\det(A_N)}{\det(A)} = \dfrac{-17}{-3} = \dfrac{17}{3} \\ C = \dfrac{\det(A_C)}{\det(A)} = \dfrac{-120}{-3} = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = \dfrac{17}{3} \\ C = 40 \end{cases}$$

Da un punto di vista matematico il sistema ha un'unica soluzione. Da un punto di vista pratico N deve essere INTERO, dal sistema non lo è, quindi praticamente è inconsistente.

Cognome e Nome .... Matricola ....

2. Operazioni fra matrici *(6 punti)*

Scrivere il risultato del prodotto fra le seguenti matrici *(2 punti)* e determinare il rango *(4 punti)* della matrice prodotto.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2+2 & 1+4+1 \\ 4+1+4 & 2+2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = A$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 54 = -18$$

essendo $\det(A) \neq 0$ il rango è pari alla dimensione della matrice (che poi è quadrata).

$\Rightarrow \quad rg(A) = 2$

28/01/2013 Prova scritta di matematica Parte II – Scienze e Tecnologie per i Beni Culturali

Cognome e Nome .... Matricola ....

3. **Probabilita'** *(6 punti)*

Si giocano alla roulette i numeri 2, 15, 25. I possibili risultati sono i numeri da 0 a 36, ognuno dei quali equiprobabile.

a) Qual e' la probabilita' di vincere, nel caso in cui la roulette non sia truccata? *(2 punti)*

b) Qual e' la probabilita' di vincere nel caso in cui la roulette sia truccata in modo tale che escano solo i numeri pari? *(4 punti)*

a) I possibili risultati sono 37, ognuno equiprobabile. La vincita si verifica se esce uno dei tre numeri scelti:

$$P_a = \frac{3}{37} \simeq 8.1\ \%$$

b) E' equivalente a chiedersi qual è la prob. di vincere sapendo che uscirà un numero pari.

Sia P_a la prob. calcolata al punto a

$$\Rightarrow P(a \mid PARI) = \frac{P(\{2,15,25\} \cap \{n^\circ \text{ PARI DA } 0 \div 36\})}{P(\{n^\circ \text{ PARI DA } 0 \div 36\})}$$

$$= \frac{P(a \cap PARI)}{P(PARI)} = \frac{P(\{2\})}{P(PARI)}$$

$$P(\{2\}) = \frac{1}{37}$$

$$P(PARI) = \frac{19}{37} \quad \Rightarrow \quad P(a \mid PARI) = \frac{1/37}{19/37} = \frac{1}{19} \simeq 5.2\ \%$$

VERIFICA

$$P\left(\begin{matrix}\text{ESCA IL 2}\\ \text{FRA I PARI}\end{matrix}\right) = \frac{1}{19}$$

Cognome e Nome .... Matricola ....

4. **Probabilita'** *(10 punti)*

Si lanciano simultaneamente un dado e una moneta.

a) Quanti sono i possibili eventi? Rappresentarli graficamente. *(2 punti)*
b) Qual e' la probabilita' che esca testa e un numero pari? *(2 punti)*
c) Qual e' la probabilita' che esca testa e il numero 6? *(2 punti)*
d) Qual e' la probabilita' che esca testa e il numero 6 sapendo che uscira' sicuramente testa? *(4 punti)*

a) La moneta ha 2 possibili risultati, il dado 6 $\Rightarrow N_{EVENTI} = 6 \cdot 2 = 12$

$(T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5), (T,6)$
$(C,1), (C,2), (C,3), (C,4), (C,5), (C,6)$

b) $P(T) = \frac{1}{2}$ $\quad P(N_{PARI}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(T \wedge N_{PARI}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (oppure $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ contando gli eventi).

c) $P(T) = \frac{1}{2}$ $\quad P(6) = \frac{1}{6}$

$P(T \wedge 6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ (oppure $\frac{1}{12}$ contando gli eventi).

d) $$P(\{T \wedge 6\} \mid \{T\}) = \frac{P(\{T \wedge 6\} \cap \{T\})}{P(\{T\})} =$$

$$= \frac{P(\{(T,6)\})}{P(\{T\})} = \frac{1/12}{1/2} = \frac{1}{6}$$

Contando gli eventi $P = \frac{1}{6}$