Matematica ed elementi di statistica
Corso di laurea in Scienze e tecnologie per i beni culturali - a.a. 2014-15
Esercizi 8: Derivata di una funzione e sue applicazioni

Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni (Le soluzioni sono state volutamente omesse)

1. $f(x) = 3x + 4\ln x - 2e^x + 3\cos x$
2. $f(x) = 4x + 2\ln x - 3e^x - 5\sin x$
3. $f(x) = x^5 + 7x^4 - 2x^3 + 3x - 1$
4. $f(x) = x^3 + \sqrt{x} - e^{2x} + \ln x$
5. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 2x - 4$
6. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 6x^2 - 3x + 1$
7. $f(x) = x^4 + \sqrt[3]{x} - \ln x + e^x - \arctan x$
8. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}$
9. $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^5}$
10. $f(x) = \sqrt[5]{x^3} + \sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$
11. $f(x) = \sqrt[5]{x^4} - \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$
12. $f(x) = (x^3 + 2x^2 + x)\ln x$
13. $f(x) = (x^3 - x^2 + 2x)\sin x$
14. $f(x) = (3x - 2)(x^2 + 4x - 3)$
15. $f(x) = (2x + 3)(x^2 + 3x - 1)$
16. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1}$
17. $f(x) = \frac{x^3 - 2\ln x}{x}$
18. $f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2}$
19. $f(x) = \frac{x^2 - 3\cos x}{x}$
20. $f(x) = (x^2 - 3x - 5)(3x^2 - 2x + 1) + \frac{x^2 + 1}{3(x^2 - 1)}$
21. $f(x) = \frac{(2x^2 - x)\ln x}{x^2 - x - 2}$
22. $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 4x + 4}$
23. $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 6x + 9}$
24. $f(x) = (3x^2 - 2x + 1)^5$

25. $f(x) = (7x^3 - 2x^2 + 3x)^4$

26. $f(x) = cos^5 x$

27. $f(x) = ln^3 x$

28. $f(x) = (x^2 - 5x + 6)^7$

29. $f(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$

30. $f(x) = \sqrt{3x - x^2} - 4x$

31. $f(x) = x - \sqrt[3]{4 - x^2}$

32. $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{3x-1}}$

33. $f(x) = \sqrt{\frac{3x+7}{8-x}}$

34. $f(x) = \sqrt{\frac{2x-9}{1-x}}$

35. $f(x) = \sqrt{\frac{x+4}{3-9x}}$

36. $f(x) = e^{3+4x-x^2}$

37. $f(x) = e^{\frac{4x+1}{x^2-2}}$

38. $f(x) = e^{\frac{x^2+5}{x+1}}$

39. $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$

40. $f(x) = x^3 \cdot e^{-x^3}$

41. $f(x) = \ln(2x^4 - 6x^3 + x^2 - 5x + 1)$

42. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

43. $f(x) = \ln\left(\frac{5x+4}{x-3}\right)$

44. $f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{2x-10}\right)$

45. $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-9}{1-4x}\right)$

46. $f(x) = \ln\left(\frac{4-x^2}{3x+1}\right)$

47. $f(x) = (\sin x^4) \cdot \left(\cos\sqrt{x}\right)$

48. $f(x) = \sin\sqrt[3]{x} + \cos 2x$

49. $f(x) = \sin\left(\frac{3x-2}{2x+7}\right)$

50. $f(x) = \cos\left(\frac{x-2}{5x+9}\right)$

51. $f(x) = \ln(\ln x)$

52. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+3x+1}}$

53. $f(x) = \sqrt{\ln(x^2+4)}$

54. $f(x) = \ln\sqrt{\cos x}$

Massimi e minimi di una funzione

Dopo aver determinato il dominio, studiare il segno della derivata prima delle seguenti funzioni, scrivere gli intervalli in cui esse sono strettamente crescenti o decrescenti e determinare eventuali punti di massimo x_M o minimo x_m relativi.

1. $f(x) = x^3 - 3x + 7$

$$D_f = \mathbb{R};\ x_m = 1;\ x_M = 1;$$

f strettamente crescente in $(-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$; f strettamente decrescente in $(-1; 1)$

2. $f(x) = 3x^3 - 27x^2 + 1$

$$D_f = \mathbb{R};\ x_m = 6;\ x_M = 0;$$

f strettamente crescente in $(-\infty;\ 0) \cup (6;\ +\infty)$; f strettamente decrescente in $(0; 6)$

3. $f(x) = x \cdot (2-3x)^3$

$$D_f = \mathbb{R};\ x_M = \frac{1}{6};$$

f strettamente crescente in $\left(-\infty;\ \frac{1}{6}\right)$; f strettamente decrescente in $\left(\frac{1}{6}; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3};\ +\infty\right)$

4. $f(x) = \frac{x^2+3}{x-5}$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{5\};\ x_m = 5 + 2\sqrt{7};\ x_M = 5 - 2\sqrt{7};$$

$$f \text{ strettamente crescente in } \left(-\infty;\ 5 - 2\sqrt{7}\right) \cup \left(5 + 2\sqrt{7};\ +\infty\right);$$

$$f \text{ strettamente decrescente in } \left(5 - 2\sqrt{7}; 5 + 2\sqrt{7}\right)$$

5. $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\};\ x_m = 1;\ x_M = -1;$$

$$f \text{ strettamente crescente in } (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty);$$

$$f \text{ strettamente decrescente in } (-1; 0) \cup (0;\ 1)$$

6. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3x-3}$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}\right\};\ x_m = 2;\ x_M = 0;$$

$$f \text{ strettamente crescente in } \left(-\infty;\ \frac{-3-\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3-\sqrt{21}}{2};\ 0\right) \cup (2;\ +\infty);$$

$$f \text{ strettamente decrescente in } \left(0; \frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{21}}{2};\ 2\right)$$

7. $f(x) = \frac{2x^2+3x+2}{x^2+x+1}$

$$D_f = \mathbb{R};\ x_m = -1;\ x_M = 1;$$

f strettamente crescente in $(-1; 1)$; f strettamente decrescente in $(-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$

8. $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\};\ x_m = 4;\ x_M = 1;$$

f strettamente crescente in $(-\infty;\ 1) \cup (4;\ +\infty)$; f strettamente decrescente in $(1; 2) \cup (2;\ 4)$

9. $f(x) = e^{\frac{1-x}{x^2}}$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\};\ x_m = 2;$$

f strettamente crescente in $(-\infty;\ 0) \cup (2;\ +\infty)$; f strettamente decrescente in $(0; 2)$

10. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$$D_f =]0;\ +\infty[;\ \ x_M = e;$$

f strettamente crescente in $(0; e) \cup$; f strettamente decrescente in $(e;\ +\infty)$

Massimi, minimi e flessi di una funzione

Determinare i punti di massimo x_M e di minimo x_m e gli eventuali punti di flesso x_F delle seguenti funzioni.

1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$ $\quad\left[x_m = 2;\ x_M = -1;\ x_F = \frac{1}{2}\right]$
2. $f(x) = -x^3 + 18x^2 + 1$ $\quad[x_m = 0;\ x_M = 12;\ x_F = 6]$
3. $f(x) = x^2 - x^3$ $\quad\left[x_m = 0;\ x_M = \frac{2}{3};\ x_F = \frac{1}{3}\right]$
4. $f(x) = x^4 - 8x^2 - 3$ $\quad\left[x_m = \pm 2;\ x_M = 0;\ x_F = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right]$
5. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ $\quad[x_m = 0;\ x_F = \pm 1]$
6. $f(x) = x \cdot e^{-x}$ $\quad[\ x_M = 1;\ x_F = 2]$