

Prova scritta di Geometria per Fisica, 2 luglio 2020

Durata della prova: 2 ore e mezza

ESERCIZIO 1. (8 punti) Nello spazio si considerino le due rette r ed s definite da:

$$r: \begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = 3 - 7t, \\ z = -1 - 5t, \end{cases} \quad s: \begin{cases} 4x - y - z + 3 = 0, \\ 2x + 2y - 4z + 4 = 0. \end{cases}$$

- (i) Determinare la posizione relativa di r ed s .
- (ii) Determinare, se esiste, un piano contenente entrambe le rette r ed s .
- (iii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane di un piano ortogonale ad s e passante per il punto $A = (-2, 1, -1)$.
- (iv) Fissato, a vostra scelta, un punto B della retta s , determinare il punto C della retta r che ha distanza minima da B .

ESERCIZIO 2. (8 punti) Sia V il sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 definito dal sistema lineare

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - w = 0, \\ x - 2y + z + 2w = 0. \end{cases}$$

- (i) Determinare la dimensione e una base ortonormale di V .
- (ii) Determinare una base ed equazioni cartesiane del complemento ortogonale V^\perp di V .
- (iii) Completare la base ortonormale di V trovata in (i) ad una base ortonormale di \mathbb{R}^4 .
- (iv) Determinare le proiezioni ortogonali del vettore $u = (1, -1, 0, 1)^T$ su V e su V^\perp .

ESERCIZIO 3. (6 punti) Si consideri il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x + ky - z = 1, \\ 2kz - x - y = 1, \\ x - 2y - z = 1, \end{cases}$$

al variare del parametro reale k . Determinare per quali valori di k il sistema è risolubile e, per tali valori di k , trovare l'insieme delle soluzioni.

ESERCIZIO 4. (12 punti) Data l'applicazione $T_k: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$T_k(x, y, z) = (2x - ky, y - 2x - z, 2y + kz)$$

al variare del parametro reale k ,

- (i) verificare che T_k è lineare per ogni $k \in \mathbb{R}$ e scrivere la matrice associata a T_k nelle basi canoniche;
- (ii) determinare per quali valori di k l'applicazione T_k è invertibile e per uno di tali valori di k trovare l'inversa di T_k ;
- (iii) per $k = -1$, determinare la dimensione, una base ed equazioni parametriche e cartesiane del nucleo e dell'immagine dell'applicazione lineare T_{-1} ;
- (iv) per $k = 2$, determinare autovalori e autospazi di T_2 e dire se è diagonalizzabile.