Prova scritta di Geometria per Fisica, 8 gennaio 2021

Durata della prova: 2 ore e mezza

Esercizio 1. (7 punti) Discutere il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} kx + 2y + z = 1, \\ 2x + y - 2kz = -1, \\ 3x - y - kz = 2k, \end{cases}$$

al variare del parametro reale k.
Determinare l'insieme delle soluzioni del sistema quando $k = -1$.

Esercizio 2. (10 punti)

(i) Dimostrare che i vettori $v_1 = (1,0,1,0)^T$, $v_2 = (1,1,0,0)^T$, $v_3 = (0,0,1,1)^T$, $v_4 = (0,1,1,0)^T$ formano una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$.

(ii) Mostrare che i vettori $w_1 = (1,-1,1)^T$, $w_2 = (1,1,1)^T$, $w_3 = (1,1,-1)^T$ formano una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$.

(iii) Sia $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$F(v_1) = (2,2,0)^T, \quad F(v_2) = (2,0,0)^T, \quad F(v_3) = (2,0,2)^T, \quad F(v_4) = (1,-1,3)^T.$$

Determinare la matrice A che rappresenta F rispetto alla basi $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$.

(iv) Calcolare la matrice $B = AA^T$, dove A^T è la matrice trasposta di A.

(v) Dire se la matrice B è diagonalizzabile.

Esercizio 3. (8 punti) Nello spazio euclideo si considerino i seguenti punti:

$$A = (1,0,1), \qquad B = (0,-2,-1), \qquad C = (-1,-1,1), \qquad D = (2,1,-1).$$

(i) Determinare equazioni parametriche e cartesiane del piano Π passante per A, B, C.

(ii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per D e ortogonale al piano Π.

(iii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per C e D.

(iv) Determinare equazioni parametriche e cartesiane del piano, se esiste, passante per C, D e parallelo alla retta passante per A e B.

Esercizio 4. (7 punti) Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e la funzione lineare $G\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ associata ad A rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$.

(i) Determinare il nucleo V e l'immagine W di G.

(ii) Determinare basi ortonormali per V e per il suo complemento ortogonale $V^\perp$.

(iii) Determinare le proiezioni ortogonali del vettore $u = (0,1,1,1)^T$ su V e su $V^\perp$.