

## Prova scritta di Geometria per Fisica, 15 luglio 2020

Durata della prova: 2 ore e mezza

ESERCIZIO 1. (12 punti) Data l'applicazione lineare  $T_k: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da

$$T_k(x, y, z) = (x - y, ky - x + (1 - k)z, 2kz + (k + 1)y)$$

al variare del parametro reale  $k$ ,

- (i) scrivere la matrice  $A$  associata a  $T_k$  nelle basi canoniche;
- (ii) determinare per quali valori di  $k$  l'applicazione  $T_k$  è invertibile e per uno di tali valori di  $k$  trovare l'inversa di  $T_k$ ;
- (iii) per un valore di  $k$  tale che  $T_k$  non è invertibile, determinare la dimensione, una base ed equazioni parametriche e cartesiane del nucleo e dell'immagine di  $T_k$ ;
- (iv) per  $k = 1$ , determinare autovalori e autospazi di  $T_1$  e dire se è diagonalizzabile;
- (v) determinare per quali valori di  $k$  la matrice  $A$  è associata ad una forma quadratica  $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ; per uno di tali valori di  $k$ , determinare la segnatura di  $q$ .

ESERCIZIO 2. (6 punti) Si consideri il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} ky + x - z = 1, \\ kz + x + y = 0, \\ (k - 1)z - y = 1, \end{cases}$$

al variare del parametro reale  $k$ . Determinare per quali valori di  $k$  il sistema è risolubile e, per tali valori di  $k$ , trovare l'insieme delle soluzioni.

ESERCIZIO 3. (8 punti) Sia  $V$  il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^4$  definito come insieme di soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x - y - z + 2w = 0, \\ 3x + z - 2w = 0, \\ x + 2y - 3w = 0. \end{cases}$$

- (i) Determinare la dimensione e una base di  $V$ .
- (ii) Trovare una base ed equazioni cartesiane del complemento ortogonale  $V^\perp$  di  $V$ .
- (iii) Determinare una base ortonormale di  $V^\perp$ .
- (iv) Determinare le proiezioni ortogonali del vettore  $u = (1, 2, 1, 1)^T$  su  $V$  e su  $V^\perp$ .

ESERCIZIO 4. (8 punti) Nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$  si considerino i seguenti punti:  $A = (-1, 3/2, -1/2)$ ,  $B = (-1/2, 1, 0)$ ,  $C = (0, -2, 1)$ ,  $D = (1, 0, 1)$ ,  $E = (1, 3, 0)$ .

- (i) Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta  $r$  passante per i punti  $A$ ,  $B$  e del piano  $\pi$  passante per i punti  $C$ ,  $D$ ,  $E$ .
- (ii) Determinare la posizione relativa di  $r$  e  $\pi$ .
- (iii) Determinare, se esiste, un piano contenente la retta  $r$  ed ortogonale al piano  $\pi$ .
- (iv) Fissato punto  $P$  della retta  $r$  a vostra scelta, determinare il punto  $Q$  del piano  $\pi$  che ha distanza minima da  $P$ .