Esame di Geometria 13/06/2018

Esercizio 1. *Sia V lo spazio di $\mathbb{R}^4$ così definito:*

$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y - z - w = 0\}.$$

Determinare:

1. una base ortonormale di V;

2. la proiezione ortogonale del vettore $u = (1, 1, 1, 1)^T$ sul sottospazio V;

3. il volume del parallelepipedo avente per lati i vettori di una base di V;

4. il complemento ortogonale di V.

Esercizio 2. *Dati il piano $\pi\colon x + 2y + 2z = 0$, il punto $A = (1, 1, 1)$, la retta*

$$r\colon \begin{cases} 2y - z - x = 2, \\ 4x - 8 = 3z, \end{cases}$$

1. scrivere l'equazione del fascio di piani per la retta r;

2. determinare il piano passante per la retta r ed ortogonale al piano π;

3. determinare il piano perpendicolare alla retta r e passante per il punto A.

Esercizio 3. *Data la forma bilineare su $\mathbb{R}^3$*

$$F(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 2x_3 y_3,$$

1. verificare che F è un prodotto scalare;

2. trovare, nello spazio euclideo determinato dal prodotto scalare F, l'angolo tra i vettori $v = e_1 + e_2 - e_3$ e $w = e_2 - e_3$, dove e_1, e_2, e_3 sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione dell'esercizio 1

Punto 1. Risolvendo l'equazione che definisce V, si trova
$$x = 2y + z + w$$
cioè x è la variable dipendente mentre y, z, w sono le variabili indipendenti.

Ponendo $y = 1$, $z = 0$, $w = 0$, ne segue che $x = 2$ e si trova la soluzione $v_1 = (2, 1, 0, 0)$.

Ponendo $z = 1$, $y = 0$, $w = 0$, ne segue che $x = 1$ e si trova la soluzione $v_2 = (1, 0, 1, 0)$.

Ponendo $w = 1$, $y = 0$, $z = 0$, ne segue che $x = 1$ e si trova la soluzione $v_3 = (1, 0, 0, 1)$.

Si conclude che $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di V, che sapevamo già avere dimensione 3 perché definito da 1 equazione (non nulla) in 4 variabili.

Calcoliamo una base ortogonale di V:
$$\begin{aligned}
&w_1 = v_1 = (2, 1, 0, 0),\\
&w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1}\, w_1 = (1, 0, 1, 0) - \frac{2}{5}\,(2, 1, 0, 0) = \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 1, 0\right),
\end{aligned}$$
e possiamo considerare $\bar{w}_2 = 5w_2 = (1, -2, 5, 0)$ al posto di w_2, poi:
$$\begin{aligned}
w_3 &= v_3 - \frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1}\, w_1 - \frac{v_3 \cdot \bar{w}_2}{\bar{w}_2 \cdot \bar{w}_2}\, \bar{w}_2 = (1, 0, 0, 1) - \frac{2}{5}\,(2, 1, 0, 0) - \frac{1}{30}\,(1, -2, 5, 0) =\\
&= \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, 1\right),
\end{aligned}$$
quindi una base ortogonale di V è
$$\{w_1 = (2, 1, 0, 0), \quad \bar{w}_2 = (1, -2, 5, 0), \quad \bar{w}_3 = 6w_3 = (1, -2, -1, 6)\}.$$
Si conclude che una base ortonormale di V è
$$\left\{u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(2, 1, 0, 0), \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}\,(1, -2, 5, 0), \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{42}}\,(1, -2, -1, 6)\right\}.$$

Punto 4. Il complemento ortogonale $V^\perp$ di V ha dimensione $\dim(\mathbb{R}^4) - \dim(V) = 4 - 3 = 1$ e un vettore di $V^\perp$ è
$$w = (1, -2, -1, -1)$$
cioè il vettore dei coefficienti delle incognite nell'equazione che definisce V. Quindi $\{w\}$ è una base di $V^\perp$.

Punto 2. Ricordiamo che $\mathbb{R}^4 = V \oplus V^\perp$ e quindi ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$ si scrive in modo unico come somma di un vettore in V e uno di $V^\perp$:
$$v = v_0 + \bar{v}_0, \qquad \text{con } v_0 \in V,\ \bar{v}_0 \in V^\perp,$$
dove v_0 è la proiezione ortogonale di v su V e $\bar{v}_0$ è la proiezione ortogonale di v su $V^\perp$.

In questo caso è più semplice calcolare prima la proiezione ortogonale di u su $V^\perp$, infatti una base ortonormale di $V^\perp$ è
$$\left\{\bar{w} = \frac{1}{\sqrt{7}}\, w = \frac{1}{\sqrt{7}}\,(1, -2, -1, -1)\right\}$$
quindi la proiezione ortogonale di $u = (1, 1, 1, 1)$ su $V^\perp$ è
$$\bar{u}_0 = (u \cdot \bar{w})\bar{w} = -\frac{3}{7}(1, -2, -1, -1) = \left(-\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{3}{7}\right).$$

Ne segue che la proiezione ortogonale di u su V è

$$u_0 = u - \bar{u}_0 = (1,1,1,1) - \left(-\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{3}{7}\right) = \left(\frac{10}{7}, \frac{1}{7}, \frac{4}{7}, \frac{4}{7}\right) \in V.$$

Punto 3. Consideriamo la base $\{v_1 = (2,1,0,0),\ v_2 = (1,0,1,0),\ v_3 = (1,0,0,1)\}$ di V trovata prima e costruiamo la matrice di Gram:

$$M = \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & v_1 \cdot v_3 \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & v_2 \cdot v_3 \\ v_3 \cdot v_1 & v_3 \cdot v_2 & v_3 \cdot v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è

$$\det(M) = 20 + 4 + 4 - 8 - 5 - 8 = 7.$$

Allora il volume del parallelepipedo avente per lati v_1, v_2, v_3 è

$$\sqrt{\det(M)} = \sqrt{7}.$$

Soluzione dell'esercizio 2

Punto 1. La retta r è l'intersezione del piano $\alpha\colon x - 2y + z + 2 = 0$ con il piano $\beta\colon 4x - 3z - 8 = 0$, quindi tutti i piani che contengono r hanno equazione

$$\lambda(x - 2y + z + 2) + \mu(4x - 3z - 8) = 0, \qquad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (\lambda, \mu) \neq (0,0),$$

che possiamo riscrivere, mettendo in evidenza le incognite, così:

$$(\lambda + 4\mu)x + (-2\lambda)y + (\lambda - 3\mu)z + 2\lambda - 8\mu = 0 \tag{1}$$

che perciò è l'equazione del fascio di piani contenenti la retta r.

Punto 2. La condizione che il piano del fascio (1) sia ortogonale al piano π è

$$(\lambda + 4\mu, -2\lambda, \lambda - 3\mu) \cdot (1,2,2) = 0,$$

cioè

$$\lambda + 4\mu - 4\lambda + 2\lambda - 6\mu = 0$$

che è equivalente a

$$\lambda = -2\mu.$$

Ponendo $\mu = 1$, ne segue che $\lambda = -2$ e il piano cercato ha equazione

$$2x + 4y - 5z = 12.$$

Punto 3. La condizione che il piano del fascio (1) passi per il punto A è

$$\lambda + 4\mu - 2\lambda + \lambda - 3\mu + 2\lambda - 8\mu = 0,$$

cioè

$$2\lambda - 7\mu = 0$$

che è equivalente a

$$\lambda = \frac{7}{2}\mu.$$

Ponendo $\mu = 2$, ne segue che $\lambda = 7$ e il piano cercato ha equazione

$$15x - 14y + z = 2.$$

Soluzione dell'esercizio 3

Punto 1. La forma bilineare F è associata alla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che è simmetrica e anche già diagonale. Gli autovalori sono gli elementi sulla diagonale, che sono tutti e tre positivi, quindi F è una forma bilineare simmetrica definita positiva, cioè F è un prodotto scalare.

Punto 2. L'angolo α tra i vettori v e w è tale che

$$\cos\alpha = \frac{F(v,w)}{\sqrt{F(v,v)}\sqrt{F(w,w)}} = \frac{3}{\sqrt{4}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

quindi $\alpha = \pi/6$ (in radianti), cioè $\alpha = 30^{\circ}$.