ESEMPIO:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{pmatrix} \qquad A=[Q]_e \qquad Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\to ?$$

"LA TEORIA A CUI SI FA RIFERIMENTO È CONTENUTA NELLA LEZIONE PRECEDENTE."

$$\begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3\\ \hline x_1 & 1&2&3\\ x_2&2&4&5\\ x_3&3&5&6\end{array}$$

$$Q((x_1,x_2,x_3))=x_1^2+4x_1x_2+6x_1x_3+4x_2^2+10x_2x_3+6x_3^2$$

MA $A=[F_Q]_e$ CON F_Q FORMA POLARE DI Q

$$\begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & y_3\\ \hline x_1 & 1&2&3\\ x_2&2&4&5\\ x_3&3&5&6\end{array}$$

$$F_Q\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right)=x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+3x_1y_3+3y_1x_3+4x_2y_2+5x_2y_3+5x_3y_2+6x_3y_3$$

TEOREMA DI SILVESTER (O DI INERZIA PER FORME QUADRATICHE REALI)

DATA UNA FORMA QUADRATICA $Q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ E QUINDI LA FORMA BILINEARE SIMMETRICA $F_Q:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ (LA SUA POLARE), ESISTE UNA BASE $B_{\mathbb{R}^n}$ F_Q-ORTOGONALE TALE CHE:

$$[Q]_{B_{\mathbb{R}^n}}=[F_Q]_{B_{\mathbb{R}^n}}=\left(\begin{array}{c|c|c}\begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix}&0&0\\ \hline 0&\begin{matrix}-1&&\\&\ddots&\\&&-1\end{matrix}&0\\ \hline 0&0&\begin{matrix}0&&\\&\ddots&\\&&0\end{matrix}\end{array}\right)$$

$a_{jj}=1 \ \forall j=1,\dots,p$

$a_{jj}=-1 \ \forall j=p+1,\dots p+q$

$a_{jj}=0 \ \forall j=p+q+1,\dots,n$

INOLTRE:

IL NUMERO DI ELEMENTI POSITIVI p SULLA DIAGONALE È INVARIANTE (NON DIPENDE DALLA BASE F-ORTOGONALE),

IL NUMERO DI ELEMENTI NEGATIVI q SULLA DIAGONALE È INVARIANTE

E ESSENDO IL RANGO $r=p+q$ INVARIANTE, ANCHE IL NUMERO DI ELEMENTI NULLI SULLA DIAGONALE $n-p+q$ È INVARIANTE

DIMOSTRAZIONE: È SEMPRE POSSIBILE TROVARE UNA BASE B DI $\mathbb{R}^m$ F-ORTOGONALE QUINDI $[F_Q]_B = [Q]_B$ È DIAGONALE

$$[F_Q]_B = (a_{ij}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \alpha_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & & 0 & \\ & & \alpha_p & & & & & & \\ \hline & & & \beta_1 & & & & & \\ & 0 & & & \ddots & & & 0 & \\ & & & & & \beta_q & & & \\ \hline & 0 & & & 0 & & & 0 & \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} a_{ii} > 0 \ \forall i = 1, \dots, p \\ a_{ii} < 0 \ \forall i = p+1, \dots, p+q \\ a_{ii} = 0 \ \forall i = p+q+1, \dots, m \end{array}$$

$\alpha_j > 0 \ \forall j = 1, \dots, p \Rightarrow \exists \ a_j \in \mathbb{R} \ | \ \alpha_j = a_j^2$

$\beta_i < 0 \ \forall i = 1, \dots, q \Rightarrow \exists \ b_i \in \mathbb{R} \ | \ \beta_i = -b_i^2$

$B = \{v_1, \dots, v_m\}$ È LA BASE F-ORTOGONALE CHE DEFINISCE LA MATRICE $[F_Q]_B$

ALLORA CONSIDERO I VETTORI $w_i = \frac{v_i}{a_i} \ \forall i = 1, \dots, p$; $w_j = \frac{v_j}{b_j} \ \forall j = p+1, \dots, p+q$

E $w_k = v_k \ \forall k = p+q+1, \dots, m$

$\{w_1, \dots, w_m\}$ È BASE F_Q-ORTOGONALE DI $\mathbb{R}^m$ E LA INDICHIAMO CON $B_{\mathbb{R}^m}$

$$[F_Q]_{B_{\mathbb{R}^m}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & & \\ \hline & & & -1 & & & & & \\ & 0 & & & \ddots & & & 0 & \\ & & & & & -1 & & & \\ \hline & & & & & & 0 & & \\ & 0 & & & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{array}\right)$$

INFATTI

$a_{ii} = F_Q((w_i, w_i)) = F_Q\left(\left(\frac{v_i}{a_i}, \frac{v_i}{a_i}\right)\right) = \frac{1}{a_i^2} F_Q((v_i, v_i)) = \frac{\alpha_i}{a_i^2} = 1 \qquad \forall i = 1, \dots, p$

$a_{jj} = F_Q((w_j, w_j)) = F_Q\left(\left(\frac{v_j}{b_j}, \frac{v_j}{b_j}\right)\right) = \frac{1}{b_j^2} F_Q((v_j, v_j)) = \frac{\beta_j}{b_j^2} = -1 \qquad \forall j = p+1, \dots, p+q$

$a_{kk} = F_Q((w_k, w_k)) = F_Q((v_k, v_k)) = 0 \quad \forall k = p+q+1, \dots, m$

ORA È NECESSARIO DIMOSTRARE CHE IL NUMERO p DI ELEMENTI POSITIVI SULLA DIAGONALE NON VARIA AL VARIARE DELLA BASE ~~F_Q-ORTOGONO~~ F_Q-ORTOGONALE.

DIMOSTRIAMO PER ASSURDO, SUPPONENDO CHE NELLA BASE $B_1 = \{v_1, \dots, v_m\}$ LA MATRICE $[F_Q]_{B_1}$ ABBIA p ELEMENTI POSITIVI SULLA DIAGONALE E CHE IN UNA BASE $B_2 = \{u_1, \dots, u_m\}$ $[F_Q]_{B_2}$ ABBIA t NUMERI POSITIVI SULLA DIAGONALE CON $p \neq t$.

SUPPONIAMO ~~ANCHE~~ D'APPRIMA $t < p$.

CONSIDERO I SOTTOSPAZI:

$V = \langle\langle v_1, \dots, v_p \rangle\rangle$ E $U = \langle\langle u_{t+1}, \dots, u_m \rangle\rangle \Rightarrow V + U \leq \mathbb{R}^m$

$\dim V + \dim U = p + m - t > m \Rightarrow \dim U \cap V > 0$

SIA $w \in U \cap V$ CON $w \neq 0$

POICHÈ $w \in U$ $F_Q(w, w) < 0$

E

POICHÈ $w \in V$ $F_Q(w, w) > 0$

ASSURDO!

$t < p$ È LA SUPPOSIZIONE ERRATA CHE HA PORTATO ALL'ASSURDO MA RIFACENDO UN RAGIONAMENTO ANALOGO SUPPONENDO $t > p$ SI GIUNGE UGUALMENTE ALL'ASSURDO, NE CONSEGUE CHE $t = p$. (c.v.d)

DEFINIZIONE: p È INVARIANTE ED È CHIAMATO INDICE D'INERZIA POSITIVO

POICHÈ ANCHE IL RANGO È INVARIANTE SARÀ INVARIANTE ANCHE IL NUMERO DI ELEMENTI NEGATIVI SULLA DIAGONALE DATO DA $q = r - p$, q È CHIAMATO INDICE DI INERZIA NEGATIVO DI Q (E QUINDI DI F_Q)

CHIAMIAMO SEGNATURA DI Q LA COPPIA $(p; q)$

$Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto x^2+y^2-2xy$ $\quad [Q]_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, CERCO UNA BASE F_Q-ORTOGONALE $B_1 \mid [Q]_{B_1} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow (x_1, x_2) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (\alpha x_1, \beta x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha x_1^2 + \beta x_2^2$$

L'ESPRESSIONE ANALITICA DI Q CHE È FORMATA DA QUADRATI DELLE COORDINATE È DETTA <u>FORMA CANONICA</u> DELLA FORMA QUADRATICA.

SIA $A = [Q]_B$ CHIAMO MINORE PRINCIPALE DI ORDINE k DI A IL DETERMINANTE DI UNA SOTTOMATRICE FORMATA DA k RIGHE DI A E DALLE STESSE k COLONNE.

IL MINORE PRINCIPALE DI NORD OVEST DI ORDINE k È IL DETERMINANTE DELLA MATRICE FORMATA DALLE PRIME k RIGHE E DALLE PRIME k COLONNE DI A.

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 7 & 8 \end{matrix} & 9 \end{pmatrix}$$

1° CRITERIO: $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ È DEFINITA POSITIVA $\Leftrightarrow$ I MINORI PRINCIPALI DI NORD OVEST DI $[Q]_B$ SONO <u>TUTTI</u> POSITIVI

2° CRITERIO: $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ È SEMIDEFINITA POSITIVA $\Leftrightarrow$ ~~TUTTI~~ I MINORI PRINCIPALI SONO <u>TUTTI</u> <u>NON NEGATIVI</u> (≥ 0)

3° CRITERIO: $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ È DEFINITA NEGATIVA $\Leftrightarrow$ I MINORI PRINCIPALI DI NORD-OVEST DI ORDINE k SONO:

- POSITIVI PER k PARI
- NEGATIVI PER k DISPARI

4° CRITERIO: $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ È SEMIDEFINITA NEGATIVA $\Leftrightarrow$ I MINORI PRINCIPALI DI ORDINE k MOLTIPLICATI PER $(-1)^k$ SONO NON NEGATIVI

PROPOSIZIONE (METODO DI JACOBI)

SIA $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ FORMA QUADRATICA E $[Q]_B = A = (a_{ij})$

DETTI d_k I MINORI PRINCIPALI DI NORD OVEST $k = 1, \dots, n$

SUPPONIAMO CHE $d_k \neq 0$ $\forall k = 1, \dots, n-1$

ALLORA ESISTE B_1 BASE DI $\mathbb{R}^n$ TALE CHE $[Q]_{B_1} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{d_2}{d_1} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & & & \frac{d_n}{d_{n-1}} \end{pmatrix}$

NOTA: I CRITERI PRECEDENTI DERIVANO DA QUESTA PROPOSIZIONE.