2/12

Determinare la retta di $\mathbb{R}^2$ parallela alla retta $3Y+2X-1=0$ e passante per $P(1,1)$

a) Direzione della retta: $2X+3Y=0$, quindi la retta cercata ha equazione $2X+3Y+C=0$

- Per trovare C basta imporre il passaggio di $2X+3Y+C$ per il punto P $[C=5]$
- Se r è data dall'equazione parametrica: $\begin{cases} x=t \\ y=\frac{1-2t}{3} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2/3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}}_{\text{vettore traslazione}}$$

DEFINIZIONE

PARAMETRI DIRETTORI: COORDINATE DI UN VETTORE DI BASE DELLA DIREZIONE DELLA RETTA.

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2/3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ individua un vettore di base della direzione r_0 di r

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ individua la traslazione rispetto alla retta avente stessa direzione passante per il centro $(0,0)$

Retta cercata: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ → passaggio per P

Fascio di rette in $\mathbb{R}^2$ è l'insieme di tutte le rette ottenute come combinazione lineare di due rette del piano: $\lambda r + \mu s = 0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- Se le 2 rette date si intersecano in $P(x_0, y_0)$

$\lambda r + \mu s = 0$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

~~Il fascio è detto~~ Ogni retta del fascio passa per P, poiché le sue coordinate annullano l'equazione.

Il fascio è detto ~~fascio~~ FASCIO PROPRIO di centro P

$r: a_1x+b_1y+c_1=0$ e $s: a_2x+b_2y+c_2=0 \Rightarrow$ fascio: $\lambda(a_1x+b_1y+c_1)+$
$+\mu(a_2x+b_2y+c_2)=0$

λ e μ non sono mai entrambi uguali a 0

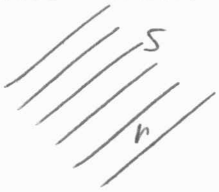
Supponiamo $\lambda \neq 0 \Rightarrow$ POSSIAMO DIVIDERE L'EQUAZIONE PER $\lambda \Rightarrow$

$$\underbrace{a_1x+b_1y+c_1}_{r}+\frac{\mu}{\lambda}\underbrace{(a_2x+b_2y+c_2)}_{s}=0 \qquad \frac{\mu}{\lambda}=t$$

ATTENZIONE:
(con t la seconda retta è impossibile da ottenere)

PERCIÒ QUESTA EQUAZIONE DEL FASCIO NON PERMETTE DI OTTENERE PER NESSUN VALORE DI t L'EQUAZIONE DELLA RETTA s.

- FASCIO IMPROPRIO:



Le rette del fascio sono parallele ed individuano infinite rette a loro volta parallele.

(Per individuare il fascio basta il vettore direzione)

Es. Determinare la retta del fascio proprio di centro $P(1,1)$ parallela $2x+y+1=0$ (DA FARE PER CASA)

Determinare l'eq. della retta per $P(x_p,y_p)$ e $Q(x_q,y_q)$

EQUAZIONE VETTORIALE

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}x_q-x_p\\y_q-y_p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_p\\y_p\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=t(x_q-x_p)+x_p\\y=t(y_q-y_p)+y_p\end{cases}$$

Direzione data dal VETTORE sottrazione dei vettori P e Q

$$\begin{cases}t=\dfrac{x-x_p}{x_q-x_p}\\[2mm] t=\dfrac{y-y_p}{y_q-y_p}\end{cases}$$

$$\boxed{\frac{x-x_p}{x_q-x_p}=\frac{y-y_p}{y_q-y_p}}$$

EQUAZIONE DI UNA RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI IN FORMA CARTESIANA

2ndo metodo: Fascio proprio di rette passante per Q o P, poi imporre il passaggio per il secondo punto.

PIANI IN $\mathbb{R}^3$ sono ottenuti traslando un sottospazio vettoriale 2 dimensionale

Se $P=\begin{pmatrix}x_\pi\\y_\pi\\z_\pi\end{pmatrix}\in\pi$ (piano) $\Rightarrow \begin{pmatrix}x_\pi\\y_\pi\\z_\pi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{\pi_0}\\y_{\pi_0}\\z_{\pi_0}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$

$\rightarrow$ VETTORE DELLA DIREZIONE DI π, π_0

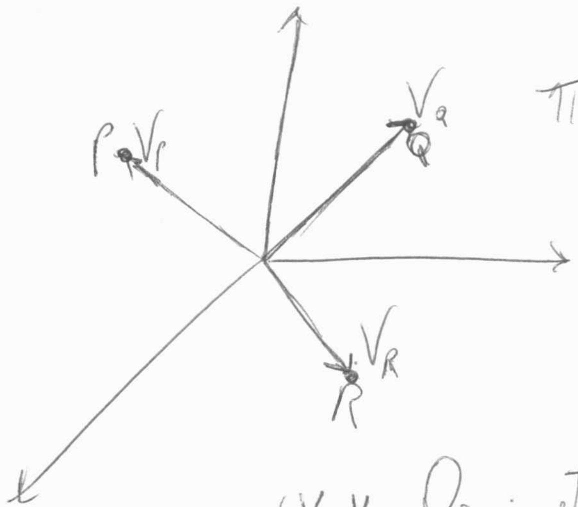
quindi $\begin{pmatrix}x_\pi\\y_\pi\\z_\pi\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}v_x^1\\v_y^1\\v_z^1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}v_x^2\\v_y^2\\v_z^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ dove $\pi_0=\langle\langle v^1,v^2\rangle\rangle$

$$\Rightarrow \pi = \begin{cases}x=tv_x^1+sv_x^2+x_0\\y=tv_y^1+sv_y^2+y_0\\z=tv_z^1+sv_z^2+z_0\end{cases}$$

EQUAZIONE PARAMETRICA

$\pi \Rightarrow ax+by+cz+d=0$

EQUAZIONE CARTESIANA



π $\quad V_Q - V_R$, $V_R - V_P$ sono vettori di base della direzione di π

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\left(V_Q - V_P\right) + s\left(V_R - V_P\right) + \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}$$

Ogni vettore (V_X) del piano è combinazione lineare dei due vettori direzione ($V_Q - V_P$ e $V_R - V_P$), quindi la matrice 3×3 formata dalle COORDINATE dei vettori: $V_Q - V_P$, $V_R - V_P$, $V_X - V_P$ deve avere determinante 0. $\Rightarrow$ CONSIDERO

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_P & y_P & z_P & 1 \\ x_Q & y_Q & z_Q & 1 \\ x_R & y_R & z_R & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x - x_P & y - y_P & z - z_P & 0 \\ x_P & y_P & z_P & 1 \\ x_Q - x_P & y_Q - y_P & z_Q - z_P & 0 \\ x_R - x_P & y_R - y_P & z_R - z_P & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

IL DETERMINANTE DI TALE MATRICE, SVILUPPATO SECONDO LA QUARTA COLONNA È =

$$= \det \begin{pmatrix} x - x_P & y - y_P & z - z_P \\ x_Q - x_P & y_Q - y_P & z_Q - z_P \\ x_R - x_P & y_R - y_P & z_R - z_P \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ PORRE IL DETERMINANTE DI TALE MATRICE UGUALE A ZERO EQUIVALE A SCRIVERE L'EQUAZIONE DEL PIANO PER I TRE PUNTI DATI.

$$\begin{vmatrix} x_S & y_S & z_S & 1 \\ x_P & y_P & z_P & 1 \\ x_Q & y_Q & z_Q & 1 \\ x_R & y_R & z_R & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ESPRIME LA CONDIZIONE DI COMPLANARITÀ DEI QUATTRO PUNTI P, Q, R, S.