Operatori isometrici in $\mathbb{R}^2$ : $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 05/05/2014

Se $A = [T]_{B_{\perp n}} \Rightarrow A$ è ortogonale $\Rightarrow$ posto $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si ha:

$\begin{cases} ab + cd = 0 \\ a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}$ $\xrightarrow{b \neq 0} a = -\frac{cd}{b}$

$\frac{c^2 d^2}{b^2} + c^2 = 1 \to c^2(d^2 + b^2) = b^2$

$c^2 = b^2$

$b \neq 0$
$c = \pm b$
$a = \mp d$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \mp d & b \\ \pm b & d \end{pmatrix}$ con $b^2 + d^2 = 1 \Rightarrow$

~~$b^2 + d^2 = 1 \Rightarrow b$~~

$d = \cos\theta$
$b = \sin\theta$

$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} +\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

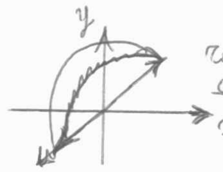
$\begin{cases} ab + cd = 0 \\ a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}$ $b = 0 \Rightarrow \begin{cases} cd = 0 \\ a^2 + c^2 = 1 \\ d^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a^2 = 1 \\ d^2 = 1 \end{cases}$

① $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

① $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ identità

② $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$v \longmapsto -v$



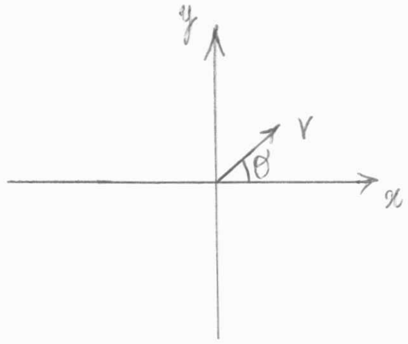

rotazione attorno all'origine di $\pi$

③ Simmetria rispetto all'asse $x$

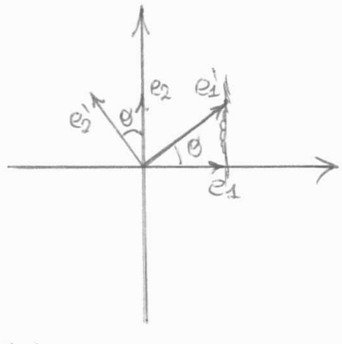
④ Simmetria rispetto all'asse $y$

Studiamo ora:

$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ~~$\begin{pmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$~~



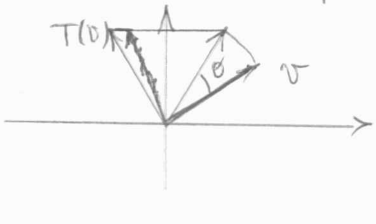

$e_1$ viene mandato in $(\cos\theta, \sin\theta)$
$e_2$ " " " $(-\sin\theta, \cos\theta)$
con $0 < \theta < \pi$




$\begin{pmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

composizione di una rotazione con una simmetria rispetto a un asse



Un operatore isometrico $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è associabile in una base ortonormale ad una di queste matrici:

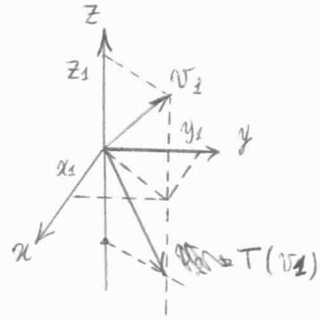
$0<\theta<\pi$

$$I, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}, \Big\{ -I, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

~~simmetria rispetto a un piano~~

$T(e_1)=e_1$
$T(e_2)=e_2$
$T(e_3)=-e_3$

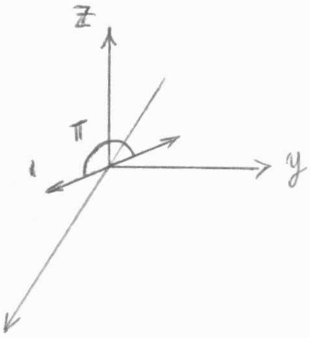
simmetria o ribaltamento relativamente al piano $z=0$




$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

rotazione di $\pi$ attorno alla retta dell'asse $x$

l'asse è un autospazio relativo all'autovalore $+1$




$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

rotazione attorno all'asse $x$ di un angolo $\theta$, $0<\theta<\pi$

rotazione pura, perché il determinante è $+1$