06/11/13

Esempi di combinazione lineare

Siano A, B, C tre studenti con le valutazioni su due parti d'esame

	A	B	C
1^	20	24	26
2^	28	30	24

Scriviamo i vettori $V_1 = (20, 24, 26)$ e $V_2 = (28, 30, 24)$

È UNA COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI V_1 E V_2

$\Rightarrow$ Il voto finale sarà dato dalla media aritmetica $m_{1,2} = \frac{V_1 + V_2}{2} = \frac{1}{2} V_1 + \frac{1}{2} V_2 = (24; 27; 25)$

se la prima parte corrisponde a 5 crediti e la seconda a 3 crediti

$\Rightarrow$ media pesata sarà data da $\frac{5}{8} V_1 + \frac{3}{8} V_2 = (23; 26,25; 25,25)$

Sono dati nello spazio $\mathbb{R}^3$, K corpi di dimensioni trascurabili e massa m_i per $i = 1, \dots, K$ disposti nei punti $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ $i = 1, \dots, K$

Il sistema così determinato ha massa $M = \sum_{i=1}^{K} m_i$. Il baricentro (o centro di massa) è dato da un vettore $G = \frac{m_1 V_1}{M} + \frac{m_2 V_2}{M} + \dots + \frac{m_K V_K}{M}$

(Curiosità: CALDER e le sue strutture cinetiche: VEDI PAGINA 4)

Proposizione Sia V spazio vettoriale tale che $V = \langle\langle g_1 \dots g_q \rangle\rangle$. Diamo p vettori in V $f_1, \dots, f_p$ con $p > q \Rightarrow f_1, \dots, f_p$ sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione $f_i = \sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij} g_j \quad \forall i = 1, \dots, p$ (PER DEFINIZIONE) $\Rightarrow$ pongo $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_p f_p = 0$

$$\lambda_1 \sum_{j=1}^{q} \alpha_{1j} g_j + \lambda_2 \sum_{j=1}^{q} \alpha_{2j} g_j + \dots + \lambda_p \sum_{j=1}^{q} \alpha_{pj} g_j = 0$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \alpha_{k1}\right) g_1 + \left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \alpha_{k2}\right) g_2 + \dots + \left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \alpha_{kq}\right) g_q = 0$$

Supponiamo che i g_j siano linearmente indipendenti $\Rightarrow$ L'EQUAZIONE DÀ il sistema SCALARE

$$\Sigma_0 \begin{cases} \lambda_1 \alpha_{11} + \lambda_2 \alpha_{21} + \dots + \lambda_p \alpha_{p1} = 0 \\ \lambda_1 \alpha_{12} + \lambda_2 \alpha_{22} + \dots + \lambda_p \alpha_{p2} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 \alpha_{1q} + \lambda_2 \alpha_{2q} + \dots + \lambda_p \alpha_{pq} = 0 \end{cases}$$

Al massimo il rango del sistema Σ_0 è q

INFATTI essendo p il numero delle variabili e q IL NUMERO DELLE EQUAZIONI, PER IPOTESI $p > q$

POSTO r IL RANGO DI Σ_0, Σ_0 ha ∞^{p-r} soluzioni, con $p - r > 0$

$\Rightarrow \exists$ soluzioni non nulle di Σ_0, cioè $\exists$ almeno un $\lambda_k \neq 0$ nella combinazione lineare degli f_i

Se i g_j sono linearmente dipendenti, consideriamo fra essi solo quelli linearmente indipendenti $\Rightarrow V = \langle\langle g_1, \dots, g_s \rangle\rangle$ con $g_1, \dots, g_s$ l. indip. e quindi ripetiamo il ragionamento.

cvd.

<u>Proposizione</u> Data una base in uno spazio vettoriale V, $\mathcal{B}_V = \{V_1 \dots V_n\} \Rightarrow$ ogni vettore $v \in V$ si scrive in <u>modo unico</u> come loro combinazione lineare.

<u>Dimostrazione</u> Supponiamo che $v = x_1 V_1 + x_2 V_2 + \dots + x_n V_n$ e $v = y_1 V_1 + y_2 V_2 + \dots + y_n V_n$

$$\Rightarrow x_1 V_1 + x_2 V_2 + \dots + x_n V_n = y_1 V_1 + y_2 V_2 + \dots + y_n V_n$$

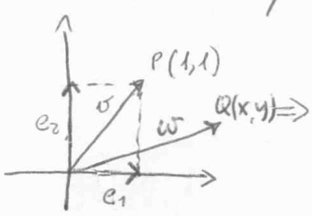
$$(x_1 - y_1) V_1 + (x_2 - y_2) V_2 + \dots + (x_n - y_n) V_n = 0$$

$$\begin{cases} x_1 - y_1 = 0 \\ x_2 - y_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n - y_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ \vdots \\ x_n = y_n \end{cases}$$

cvd.

<u>Definizione</u> I coefficienti della combinazione lineare che esprime un vettore v in una base $\mathcal{B}_V$, sono detti <u>coordinate del vettore v nella base $\mathcal{B}_V$</u> e scriveremo, se $v = x_1 V_1 + x_2 V_2 + \dots + x_n V_n \Rightarrow [v]_{\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Esempio.



$\Rightarrow [v]_{e_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $[w]_{e_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ se $w = x e_1 + y e_2$

Esempio. Consideriamo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$ So che A è data in modo unico come combinazione lineare dei vettori di una base fissata, ad esempio la canonica $\mathcal{C}_{\mathcal{M}_{2\times3}} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_2}, \dots \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_6} \right\}$ in questo modo

$$A = 1 e_1 + 2 e_2 + 3 e_3 + 4 e_4 + 5 e_5 + 6 e_6 \Rightarrow [A]_{e_{\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}_2[x] = \{ a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ con $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$

Una base di $\mathbb{R}_2[x]$ è $\cancel{\{1, x, x^2\}}$ $\{x^2, x, 1\} \Rightarrow a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 1$

$$[p(x)]_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}_2[x]}} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

Se si cambia la base in uno spazio vettoriale, cambiano le coordinate dei vettori: <u>AD ESEMPIO</u>

$\mathcal{B}_1 = \mathcal{C}$ e $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2\}$

$$\Rightarrow x e_1 + y e_2 = z v_1 + s v_2 \Rightarrow z(\overbrace{a_1 e_1 + a_2 e_2}^{v_1}) + s(\underbrace{b_1 e_1 + b_2 e_2}_{v_2}) = (z a_1 + s b_1) e_1 + (z a_2 + s b_2) e_2$$

$$\Rightarrow (z a_1 + s b_1) e_1 + (z a_2 + s b_2) e_2 = x e_1 + y e_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = z a_1 + s b_1 \\ y = z a_2 + s b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$[V_1]_{e=B_1} \quad [V_2]_{e=B_1}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ È LA MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE: DA B_2 a B_1:

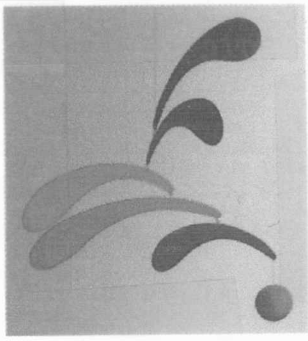
LE COLONNE SONO DATE DALLE COORDINATE DEI VETTORI DELLA BASE $B_2 = \{v_1, v_2\}$ ESPRESSI COME COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI DELLA BASE B_1

L'EQUAZIONE MATRICIALE A CUI SIAMO GIUNTI ESPRIME LE COORDINATE DEL VETTORE GENERICO v NELLA BASE B_1, CONOSCENDO LE COORDINATE DELLO STESSO VETTORE NELLA BASE B_2.

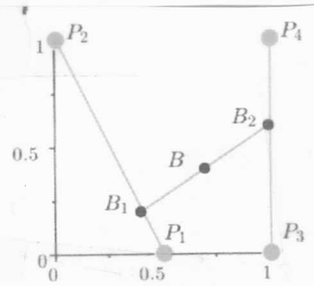
ESEMPIO DI COMBINAZIONE LINEARE

iii) Sculture cinetiche

L'artista "cinetico" A. CALDER (1896 - 1976) ha realizzato molte sculture composte da più elementi, nelle quali la posizione dei baricentri hanno un ruolo importante. La scelta dei punti di sospensione rende possibile il movimento delle parti senza perdere la stabilità complessiva.



Schematizziamo una sua opera: 4 punti pesanti con coordinate $P_1 = (\frac{1}{2}, 0)$; $P_2 (0,1)$; $P_3 = (1,0)$ e $P_4 = (1,1)$ sono uniti a coppie da asticelle di massa trascurabile.



Le asticelle sono unite da un'ulteriore asta $B_1 B_2$ e tutta la struttura è sospesa per il punto B. I pesi dei punti sono diversi P_1 peso 4, P_2 peso 1, P_3 peso 2, P_4 peso 3.
La struttura è stabile se B_1 è il baricentro di $P_1 P_2$ e B_2 è il baricentro di $P_3 P_4$ e B è il baricentro complessivo del sistema. Calcoliamo dove cade B!

La massa di $P_1 P_2$ è 5 $\Rightarrow$ $B_1 = \frac{4}{5} P_1 + \frac{1}{5} P_2 =$

$$= \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}, 0\right) + \frac{1}{5}(0,1) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

La massa complessiva di $P_3 P_4$ è 5 $\Rightarrow$ $B_2 = \frac{2}{5} P_3 + \frac{3}{5} P_4$

$$= \frac{2}{5}(1,0) + \frac{3}{5}(1,1) = \left(1, \frac{3}{5}\right)$$

La massa complessiva di $B_1 B_2$ è 10 $\Rightarrow$ $B = \frac{5}{10} B_1 + \frac{5}{10} B_2$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(1, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{7}{10}, \frac{4}{10}\right)$$