MERCOLEDÌ 07/05/14

SIA DATA UNA MATRICE

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt3}{3} & -\frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt6}{6} \\ \frac{\sqrt3}{3} & \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt6}{6} \\ \frac{\sqrt3}{3} & 0 & \frac{\sqrt6}{3} \end{pmatrix}$$

SUPPONIAMO CHE A SIA ASSOCIATA NELLA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^3$, RISPETTO AD UN OPERATORE $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

A È ORTOGONALE?

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt3}{3} & -\frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt6}{6} \\ \frac{\sqrt3}{3} & \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt6}{6} \\ \frac{\sqrt3}{3} & 0 & -\frac{\sqrt6}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt3}{3} & \frac{\sqrt3}{3} & \frac{\sqrt3}{3} \\ -\frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt6}{6} & \frac{\sqrt6}{6} & -\frac{\sqrt6}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$AA^T = I \Rightarrow$ È ORTOGONALE

$\Rightarrow$ T È UN OPERATORE ISOMETRICO NELLO SPAZIO TRIDIMENSIONALE

- CLASSIFICHIAMO T: POSSIAMO DETERMINARE UNA BASE $\mathcal{B}_{\perp m}$ DI $\mathbb{R}^3$ RISPETTO ALLA QUALE LA MATRICE ASSOCIATA A T, $[T]_{\mathcal{B}_{\perp m}}$ PUÒ AVERE LA FORMA:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{\boxtimes} \text{ OPPURE } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{*} \text{ OPPURE}$$

[IN OGNI CASO FORME DIVERSE DALL'IDENTITÀ]
[PERCHÉ L'IDENTITÀ È SIMILE SOLO A SE STESSA]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{\Delta} \text{ OPPURE } \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{=B} \text{ CON } 0<\theta<\pi$$

QUINDI:

$$|A| = \frac{\sqrt3}{3}\underbrace{\left(-\frac{\sqrt{12}}{12}-\frac{\sqrt{12}}{12}\right)}_{-\frac{\sqrt{12}}{6}=-\frac{\sqrt3}{3}} - \frac{\sqrt6}{3}\underbrace{\left(\frac{\sqrt6}{6}+\frac{\sqrt6}{6}\right)}_{\frac{\sqrt6}{3}} = -\frac{3}{9}-\frac{6}{9} = -1$$

QUINDI SCARTIAMO LE MATRICI CONTRASSEGNATE CON $\boxtimes$ E Δ PERCHÈ IL DETERMINANTE È INVARIANTE PER SIMILITUDINE

– SI DIMOSTRA CHE UNA MATRICE REALE È DIAGONALIZZABILE ORTOGONALMENTE $\Longleftrightarrow$ È SIMMETRICA.

DI CONSEGUENZA LA FORMA CANONICA DELLA MATRICE NON PUÒ ESSERE $\boxtimes$

QUINDI LA FORMA CANONICA DELLA MATRICE È L'ULTIMA PRECEDENTEMENTE SCRITTA: LA COMPOSIZIONE DI UNA ROTAZIONE E DI UNA SIMMETRIA ~~[illegible]~~ RISPETTO AD UN PIANO

CERCO L'AUTOSPAZIO RELATIVO ALL'AUTOVALORE $\lambda = -1$ (INVARIANTE RISPETTO ALLA ROTAZIONE ED AL RIBALTAMENTO)

$$(A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3}+1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2}+1 & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{2}+2}{2}y + \frac{\sqrt{6}}{6}z = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{3-\sqrt{6}}{3}z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}\,x + (\sqrt{6}+\sqrt{3})y + z = 0 \\ x + (\sqrt{3}-\sqrt{2})z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{3})+1)z + (\sqrt{6}+\sqrt{3})y = 0 \\ x = (-\sqrt{3}+\sqrt{2})z \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}z \\ x = (-\sqrt{3}+\sqrt{2})z \end{cases} \Rightarrow$$ QUESTA RETTA È L'ASSE DELLA ROTAZIONE

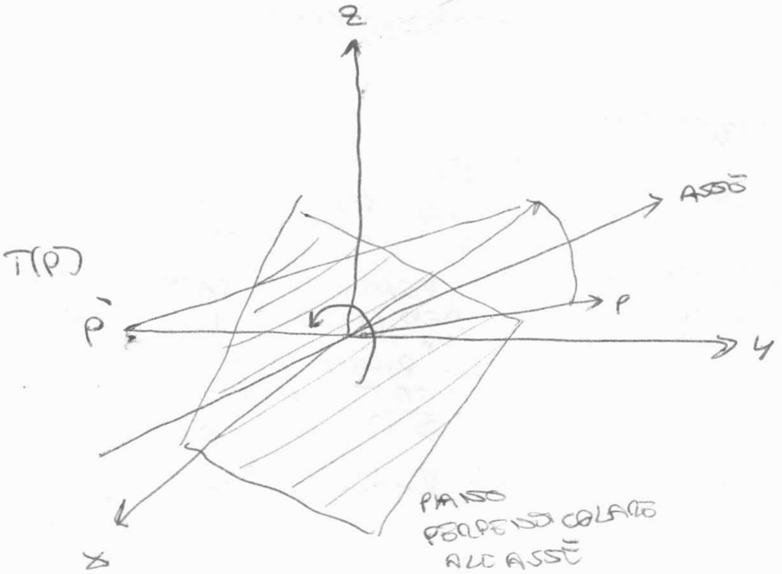
CON $z = -(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

IL FASCIO DEI PIANI DELLA ROTAZIONE È FORMATO DA PIANI PARALLELI AVENTI PER DIREZIONE IL SOTTOSPAZIO ORTOGONALE ALL'ASSE DI ROTAZIONE:

$x + \frac{1}{\sqrt{2}+1}y - (\sqrt{3}+\sqrt{2})z = 0$ PIANO DELLA ROTAZIONE = PIANO DELLA SIMMETRIA

$\pi_{\parallel} = x + (\sqrt{2}-1)y - (\sqrt{3}+\sqrt{2})z = 0$

IL VETTORE $\left(1;\ \sqrt{2}-1;\ -(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right)$, NORMALIZZATO, SARÀ IL PRIMO VETTORE DI $\mathcal{B}_{\perp n}$ CERCATA, RISPETTO ALLA QUALE $[T]_{\mathcal{B}_{\perp n}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$



RICONSIDERANDO LE MATRICI:

$B = S^{-1}AS = S^{T}AS$ PERCHÉ S È ORTOGONALE

S È LA MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE E AVRÀ COME VETTORI COLONNA QUELLI DI $\mathcal{B}_{\perp n}$; GLI ALTRI 2 VETTORI DELLA BASE $\mathcal{B}_{\perp n}$ SONO SUL PIANO PERPENDICOLARE AL PRIMO VETTORE (IL QUALE È SULL'ASSE DI ROTAZIONE) E QUINDI SUL PIANO DELLA ROTAZIONE: INOLTRE DEVONO ESSERE ORTOGONALI L'UNO ALL'ALTRO E NORMALIZZATI;

CERCO UN SECONDO VETTORE DI BASE IN π

$\pi = x + (\sqrt{2}-1)y - (\sqrt{3}+\sqrt{2})z = 0$

$v_2 = (1-\sqrt{2};\ 1;\ 0) \in \pi$ POSTO $z=0$

CERCO v_3 TALE CHE $v_3 \in \pi$ E $v_3 \cdot v_2 = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \left((1-\sqrt{2})y + (\sqrt{3}+\sqrt{2})z;\ y;\ z\right)\cdot(1-\sqrt{2};\ 1;\ 0) = 0$

$(1-\sqrt{2})^2 y + (\sqrt{3}+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})z + y = 0$

$y = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}z$

$v_3 = \left((\sqrt{3}+\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) ; \sqrt{3}+\sqrt{2} ; 2\sqrt{2} \right) \Rightarrow$ LA BASE

$$\mathcal{B}_{\perp_n} = \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|} ; \frac{v_2}{\|v_2\|} ; \frac{v_3}{\|v_3\|} \right\} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} \frac{v_1}{\|v_1\|} & \frac{v_2}{\|v_2\|} & \frac{v_3}{\|v_3\|} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ ESSENDO

$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} = S^{-1}AS = S^{T}AS$, POSSO DETERMINARE $\sin\vartheta$ E $\cos\vartheta$ E QUINDI ϑ; OPPURE POICHÉ LA TRACCIA SI MANTIENE PER SIMILITUDINE $\Rightarrow Tr\,B = Tr\,A \Rightarrow$

$$\Longrightarrow -1 + 2\cos\vartheta = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{6} \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow \cos\vartheta = \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-2\sqrt{6}+6}{12}$$

. PER DETERMINARE L'ANGOLO ϑ DOBBIAMO TROVARE IL VERSO DELLA ROTAZIONE; POICHÉ

$\cos\vartheta$ PUÒ INDIVIDUARE (NELL'ANGOLO GIRO) DUE ANGOLI, LA SCELTA DELL'ANGOLO DIPENDERÀ DAL VERSO DELLA ROTAZIONE: SE IL DETERMINANTE DELLA MATRICE AVENTE PER COLONNE I VETTORI: IL VETTORE V_1 SULL'ASSE DI ROTAZIONE, IL VETTORE V_2 SUL PIANO PERPENDICOLARE ALL'ASSE ED IL TERZO, V_3, TRASFORMATO DI V_2 TRAMITE T $\Rightarrow$ SE $|V_1, V_2, V_3| > 0$ LA ROTAZIONE È DESTRORSA, ALTRIMENTI SINISTRORSA SE $|V_1, V_2, V_3| < 0$.

VEDIAMO PERCHÉ <u>IL VERSO</u> DELLA ROTAZIONE DIPENDE DAL SEGNO DEL DETERMINANTE DELLA MATRICE DATA:

Nell'insieme delle basi di uno spazio vettoriale V si definisce una relazione: $\forall$ coppia di basi esiste una trasformazione lineare che manda la prima base nella seconda. Il determinante di questa trasformazione, che è un'isomorfismo, è $\neq 0$ (cioè tale è il determinante della matrice associata nelle due basi)

Due basi si dicono in relazione $\iff$ il determinante della trasformazione è > 0. Tale relazione è di equivalenza.

L'insieme delle basi è allora diviso in due classi. A priori non c'è modo di identificare gli elementi di una classe come positivi o negativi. <u>L'orientazione</u> dello spazio V consiste proprio nella scelta arbitraria di una classe come positiva: le scelte possibili sono 2 quindi V ha due possibili orientazioni.

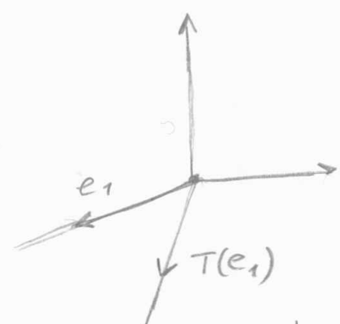
Se prendo in uno spazio euclideo una base $\mathcal{B} = \{v_1 - v_n\}$ è considerata positiva $\iff$ $\det([v_1], \dots [v_n]) > 0$. Così la base e^n è positiva. Così una rotazione manda una base positiva in un'altra positiva, se il suo determinante è maggiore di zero.

ESERCIZIO

Studiare la trasformazione isometrica definita dalla matrice $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sappiamo che le matrici simmetriche sono diagonalizzabili ortogonalmente, quindi sapendo che $\det A = -1$ e $\operatorname{Tr} A = 1$ $\Rightarrow$ gli autovalori della matrice A sono $1, 1, -1$ quindi la matrice diagonale simile ad A sarà

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



La matrice A ci dice che $T(e_3) = e_3$

mentre $T(e_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ che quindi rimane nel piano $z=0$ e così $T(e_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ rimane nel piano $z=0$ che quindi è un piano $\perp$ al piano di riflessione

Considero il vettore $v = e_1 + T(e_1)$

$$T(e_1 + T(e_1)) = T(e_1) + T(T(e_1)) = T(e_1) + T^2(e_1)$$

$T^2 =$ identità : infatti $A \cdot A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{-1} & \sqrt{2}^{-1} & 0 \\ \sqrt{2}^{-1} & -\sqrt{2}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{-1} & \sqrt{2}^{-1} & 0 \\ \sqrt{2}^{-1} & -\sqrt{2}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T(e_1) + T^2(e_1) = T(e_1) + e_1$$

$\Rightarrow$ $v = e_1 + T(e_1)$ è un autovettore di autovalore 1 $\Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{-1} \\ \sqrt{2}^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

e così $e_2 + T(e_2) \Rightarrow T(e_2 + T(e_2)) = T(e_2) + e_2$

In generale preso $v \neq 0 \Rightarrow v + T(v)$ è autovettore di autovalore 1

$\Rightarrow E(1) = \{ v + T(v) \mid \forall v \in \mathbb{R}^3 \}$: Se $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow v + T(v) = \begin{pmatrix} \frac{(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\beta \\ 2\gamma \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ prendiamo due tali vettori l.i e determiniamo $E(1)$

Possiamo anche trovarlo usando $\lambda = 1$ nella matrice A :

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1-\sqrt{2})x + y = 0 \\ x - (1+\sqrt{2})y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow E(1) = : \quad y = (\sqrt{2}-1)x$ è il piano di riflessione π

$E(-1)$ sarà una retta $\perp$ a tale piano

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1+\sqrt{2})x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ retta } r$$

Vediamo se sono $\perp$: $\begin{cases} x = t \\ y = -(1+\sqrt{2})t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$ ~~[illegible]~~

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{+(1+\sqrt{2})}{+1}$ ok sono $\perp$