<u>Esercizio</u>: studiare la posizione reciproca di 2 rette in $\mathbb{R}^3$ e la reciproca posizione di 3 piani in $\mathbb{R}^3$.
(Vi ricordo che due rette non parallele e non intersecanti in $\mathbb{R}^3$ sono dette SGHEMBE)

Applicazioni negli spazi vettoriali

Siano G_1, G_2 due gruppi con le operazioni "$*$" e "$\square$" => le applicazioni fra i gruppi sono riviste ora non da un punto di vista semplicemente insiemistico, ma tenendo conto anche della loro interazione con le operazioni dei gruppi: chiamiamo MORFISMO di gruppi un'applicazione $f: G_1 \longrightarrow G_2$ tale che $f(g_1 * g_2) = f(g_1) \square f(g_2)$

<u>Esempio</u>: considero $f: \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{matrix}$, se $\mathbb{R}$ sono due gruppi additivi, allora f è morfismo?

Deve valere: $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

$\Rightarrow (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2$, uguaglianza non verificata.

Perciò f non è un morfismo di gruppi additivi

In uno spazio vettoriale, sono definite due operazioni: la somma e la moltiplicazione per uno scalare; un morfismo tra spazi vettoriali V_1 e V_2 è un'applicazione $L: V_1 \longrightarrow V_2$ tale che: $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$ $\forall v_1, v_2 \in V_1$ e $L(\alpha v) = \alpha L(v)$ $\forall v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Tali morfismi sono chiamati <u>APPLICAZIONI LINEARI</u>.

<u>Esempio</u>: $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x_1; x_2) \longmapsto (x_1 + x_2; x_1; x_2 - x_1)$

L è un'applicazione lineare?

① Siano $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ed $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ due vettori in $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow L(x+y) = (x_1 + y_1 + x_2 + y_2; x_1 + y_1; x_2 + y_2 - x_1 - y_1)$

$L(x) + L(y) = (x_1 + x_2; x_1; x_1 - x_2) + (y_1 + y_2; y_1; y_1 - y_2) =$

$= (x_1 + y_1 + x_2 + y_2; x_1 + y_1; x_2 + y_2 - x_1 - y_1)$

$\Rightarrow L(x+y) = L(x) + L(y)$ verificato

② $L(\alpha X) = L\begin{pmatrix}\alpha x_1 \\ \alpha x_2\end{pmatrix} = (\alpha x_1 + \alpha x_2;\ \alpha x_1;\ \alpha x_2 - \alpha x_1)$

$\alpha L(x) = \alpha(x_1 + x_2;\ x_1;\ x_2 - x_1)$

$\Rightarrow L(\alpha X) = \alpha L(x)$ verificato

- Perciò L è un'applicazione lineare!

Esempio: sia $V = \{f$ integrabili su $[a;b]\}$ e consideriamo l'integrazione come funzione definita su V: $V \longrightarrow V$

$$f \longmapsto \int f(x)\,dx$$

Chiamiamo questa applicazione "INT", allora "INT" è un'applicazione lineare? Sì perché:

① $\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

② $\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$

- Un'altra applicazione lineare è la derivazione

OSSERVAZIONE:

Si dimostra che un'applicazione fra spazi vettoriali è lineare se e soltanto se le coordinate del vettore immagine sono espresse mediante polinomi lineari omogenei nelle coordinate del vettore del dominio.

Questo vale solo se l'applicazione è scritta in "forma analitica", come nel caso del secondo esempio.

DEFINIZIONE:

Data $L: V_1 \longrightarrow V_2$ lineare si chiama NUCLEO di L il sottoinsieme di V_1 formato dai vettori che hanno immagine nulla cioè: $\mathrm{Ker}\,L = \{v \in V_1 \,/\, L(v) = 0\}$

Esercizio: dimostrare che $\mathrm{Ker}\,L$ è un sottospazio dello spazio V_1.

Data $L: V \longrightarrow W$ lineare $\Rightarrow \mathrm{Im}\,L = \{w \in W \,/\, \exists\, v \in V \,/\, L(v) = w\}$ è anch'esso un sottospazio vettoriale di W.

Esercizio: verificare che $\mathrm{Im}\,L$ è sottospazio di W

Teorema delle dimensioni:

Data $L: V \longrightarrow W$ lineare $\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L = \dim V$

DIMOSTRAZIONE:

- $k = \dim \operatorname{Ker} L \Rightarrow k \leq n$
- $l = \dim \operatorname{Im} L \Rightarrow l \leq m$
- $n = \dim V$
- $m = \dim W$

Sia $B_{\operatorname{Ker} L} = \{u_1, \dots, u_k\}$, $B_{\operatorname{Im} L} = \{w_1, \dots, w_l\}$

Considero $w \in \operatorname{Im} L \Rightarrow w = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_l w_l \Rightarrow \exists\, v_1, \dots, v_l \in V$ tali che
$L(v) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) + \dots + \alpha_l L(v_l)$
La relazione può essere scritta come PER LA LINEARITÀ DI L: $L(v) = L(\alpha_1 v_1) + \dots + L(\alpha_l v_l)$
Per la linearità dell'applicazione L, otteniamo: $L(v) = L(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_l v_l)$

$\Rightarrow L(v) - L(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_l v_l) = 0$

$\Rightarrow L(v - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_l v_l) = 0$, da cui $(v - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_l v_l) \in \operatorname{Ker} L$
Perciò, il vettore può essere scritto come combinazione lineare dei vettori della base di Ker L:

$v - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_l v_l = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_k u_k \Rightarrow v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_l v_l + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_k u_k$

$\Rightarrow V = \langle\langle v_1, \dots, v_l, u_1, \dots, u_k \rangle\rangle$, dobbiamo dimostrare che i vettori sono linearmente indipendenti.
Pongo: $\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \dots + \gamma_l v_l + \delta_1 u_1 + \dots + \delta_k u_k = 0$

$\Rightarrow L(\gamma_1 v_1 + \dots + \delta_k u_k) = L(0) = 0$

Applicando le proprietà dell'applicazione lineare:

$$\gamma_1 \underbrace{L(v_1)}_{= w_1} + \dots + \gamma_l \underbrace{L(v_l)}_{= w_l} + \delta_1 \underbrace{L(u_1)}_{= 0} + \dots + \delta_k \underbrace{L(u_k)}_{= 0} = 0$$

$\Rightarrow \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_l w_l + 0 + \dots + 0 = 0$ ma $\{w_1, \dots, w_l\} \in B_{\operatorname{Im} L}$

$\Rightarrow \gamma_1 = \dots = \gamma_l = 0$

$\Rightarrow$ La combinazione lineare:

$$\gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_e v_e + \delta_1 u_1 + \dots + \delta_k u_k = \theta$$

può essere scritta semplicemente:

$$\delta_1 u_1 + \dots + \delta_k u_k = \theta$$

ma $\{u_1, \dots, u_k\}$ è $B_{\ker L} \Rightarrow \delta_1 = \dots = \delta_k = 0$

$\Rightarrow \{v_1, \dots, v_e, u_1, \dots, u_k\}$ è base di V! $\Rightarrow$ # DELLA BASE $= l + k = \dim V \Rightarrow$

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L.$$