1   12-03-14

Ricordo la definizione di Autospazio:

Dato $T: V \to V$ e fissata in V una base $\mathcal{B}$, si ha $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$

$\Rightarrow$ per determinare gli autospazi di T si cerca

$$Sol\left(\left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda_0 I\right)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_m\end{pmatrix} = 0\right)$$ dove λ_0 è autovalore di T.

Abbiamo già dimostrato che $E_{\lambda_0} \cup \{0\}$ è un sottospazio di V CHE CONTINUEREMO AD INDICARE CON E_{λ_0} ED ABBIAMO GIÀ VISTO che $\dim E_{\lambda_0} \geq 1$

<u>Definizione</u>: La $\dim E_{\lambda_0}$ è chiamata MOLTEPLICITA' GEOMETRICA di λ_0

<u>Proposizione</u>: $\forall \lambda_0$ autovalore di T, la molteplicità geometrica è sempre $\leq$ della molteplicità algebrica.

<u>Dimostrazione</u>: Sia E_{λ_0} l'autospazio relativo a λ_0;
sia $\dim V = n$ e $\dim E_{\lambda_0} = k$ con $k \leq n$

$\Rightarrow$ Prendiamo in V una base di E_{λ_0}: $\mathcal{B}_{E_{\lambda_0}} = \{v_1, \dots v_k\}$
e la completiamo ad una base di V, $\mathcal{B}_V \Rightarrow [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = ?$
POSTA:
$\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots v_k, v_{k+1}, \dots v_n\}$.

Ecco $T(v_1) = \lambda_0 v_1 = \lambda_0 v_1 + 0v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_n$;
$T(v_2) = \lambda_0 v_2 = 0v_1 + \lambda_0 v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_n; \dots; T(v_k) = \lambda_0 v_k$.

$$\Rightarrow [T]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_V} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ k \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,k+1} & a_{1,k+2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \lambda_0 & & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & 0 & & 0 & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & a_{k,k+1} & a_{k,k+2} & \cdots & a_{k,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & a_{k+1,k+1} & \cdots & \cdots & a_{k+1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k,k+1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$
k

~~[illegible]~~

Considero $\left|[T]_B^B - \lambda I\right| = \begin{vmatrix} \lambda_0-\lambda & 0 & \cdots & & a_{1,k+1} & & a_{1,m} \\ 0 & \lambda_0-\lambda & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_0-\lambda & a_{k,k+1} & \cdots & a_{k,m} \\ \vdots & & & & a_{k+1,k+1}-\lambda & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & * & \cdots & a_{m,m}-\lambda \end{vmatrix}$

$= (\lambda_0-\lambda)(\lambda_0-\lambda)\cdot(\lambda_0-\lambda) \begin{vmatrix} a_{k+1,k+1}-\lambda & \cdots & a_{k,m} \\ * & & \vdots \\ \vdots & & \\ * & \cdots & a_{m,m}-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (\lambda_0-\lambda)^k p^{(m-k)}(\lambda) \Longrightarrow \dim E_{\lambda_0} \leq \mu(\lambda_0)$ POICHÈ $(\lambda_0-\lambda)$ PUÒ ESSERE FATTORE DI $p^{m-k}(\lambda)$ E QUINDI LA SUA MOLTEPLICITÀ COME FATTORE NELLA SCOMPOSIZIONE PUÒ ESSERE MAGGIORE

<u>Osservazione</u>:

se $\lambda_i \neq \lambda_j \Longrightarrow E_{\lambda_i} \cap E_{\lambda_j} = \{0\}$

[<u>Precisazione</u>: un autospazio è sottospazio vettoriale se ad esso si unisce il vettore nullo.]

<u>Definizione</u>: un operatore $T: V \longrightarrow V$ è detto DIAGONALIZZABILE se e solo se fissata una base B in V, la matrice associata a T nella base B: $[T]_B^B$ è diagonalizzabile, cioè $\exists\, B'$ di V tale che $[T]_{B'}^{B'}$ è diagonale.

<u>Proposizione</u>: $T: V \longrightarrow V$ è diagonalizzabile se e solo se $\exists$ una base di V formata da autovettori di V.

<u>Dimostrazione</u>:

Supponiamo che $B_V \{v_1, \ldots v_m\}$, $\dim V = m$, sia formata da autovettori $\Longrightarrow$

(2)

$$[T]^{B_V}_{B_V} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & \lambda_1 & & & & & \vdots \\ \vdots & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & \lambda_2 & & \\ \vdots & & & & & \lambda_3 & \\ 0 & \cdots & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

cioè sono una matrice diagonale con gli autovalori (eventualmente ripetuti) sulla diagonale

$\Rightarrow$ T è diagonalizzabile

Viceversa: se T è diagonalizzabile $\Rightarrow \exists\, B_V$ di V tale che $[T]^{B_V}_{B_V} = D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \cdots & 0 & 0 \\ & 0 & a_{33} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & a_{mm} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ se $B_V = \{v_1, \dots v_m\} \Rightarrow T(v_1) = a_{11} v_1$

$T(v_2) = a_{22} v_2$

$\vdots$

$T(v_m) = a_{mm} v_m$

$\Rightarrow v_1, \dots v_m$ sono autovettori di T.

c.v.d.

<u>Proposizione</u>: $T: V \longrightarrow V$ è diagonalizzabile se e solo se $\sum_{j=1}^{p} \dim E_{\lambda_j} = n$, (dove $n = \dim V$ e λ_j sono gli autovalori distinti di T) $\Longleftrightarrow V = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$.

<u>Dimostrazione</u> ($\Rightarrow$)

T diagonalizzabile $\Rightarrow \exists\, B_V$ base di V, formata da autovettori; consideriamo gli autovettori della base che si riferiscono allo stesso autovalore λ_j:

$\Rightarrow$ chiamo $u_1(\lambda_j), \dots, u_q(\lambda_j)$ tali autovettori e

$\mathcal{U}_{\lambda_j} = \langle\langle u_1(\lambda_j), \dots u_q(\lambda_j) \rangle\rangle$

$\Rightarrow V = \mathcal{U}_{\lambda_j} \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_{\lambda_p}$ ma ogni $\mathcal{U}(\lambda_j) \subseteq E_{\lambda_j}$

$\forall j = 1, \dots p \Rightarrow V \subseteq E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p} \subseteq V$

quindi $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p} = V$

Per il teorema di Grassmann $n = \dim \bigoplus_{j=1}^{p} E_{\lambda_j} = \sum_{j=1}^{p} \dim E_{\lambda_j}$

($\Leftarrow$) viceversa: se $V = \bigoplus_{j=1}^{p} E_{\lambda_j} \Rightarrow$ considero una base di V unendo le basi dei $E_{\lambda_j} \Rightarrow$ la base trovata è formata da autovettori $\Rightarrow$ T è diagonalizzabile

<u>Proposizione:</u>

T è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ detta A la matrice ad essa associata in una base $\mathcal{B}$ di V, $\Rightarrow$

1) il polinomio caratteristico $|A - \lambda I|$ è totalmente scomponibile nel campo di lavoro che per noi attualmente è $\mathbb{R}$: cioè tutte le radici caratteristiche (gli autovalori) appartengono al campo.

$\Rightarrow$ questo equivale a richiedere che

$$\sum_{j=1}^{p} \mu(\lambda_j) = n = \deg |A - \lambda I|$$

③

2) $\dim E_{\lambda_j} = \mu(\lambda_j)\ \forall j=1, \dots p$ (che equivale a dire che $\sum_{j=1}^{p} \dim E_{\lambda_j} = n$).

<u>Osservazione</u>: se gli autovalori di T sono tutti nel campo e tutti distinti (con molteplicità $\mu(\lambda_j)=1$ $\forall j=1, \dots n$) $\Rightarrow$ T è diagonalizzabile

<u>Definizione</u>: l'insieme di tutti gli autovalori di T ripetuti tante volte quanto è la loro molteplicità è detto SPETTRO di T.

<u>Esercizio</u>

$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che, fissata la base canonica $e_{\mathbb{R}^2}$, $T(e_1) = e_2$ e $T(e_2) = 0$ è diagonalizzabile?

$\rightarrow$ consideriamo la matrice associata a T nella base canonica nel dominio e nel codominio

$$[T]_e^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ consideriamo $|[T]e - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0$

$\Rightarrow$ ho trovato un autovalore $\lambda = 0$ con $\mu(0) = 2$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0 : E_0$

$\Rightarrow \dim E_0 = 1 \Rightarrow$ T non è diagonalizzabile

$Sp(T) = \{0, 0\}$ (indica gli autovalori e la loro molteplicità)

Se A è diagonalizzabile, $\exists$ S invertibile:

$D = S^{-1} \cdot A \cdot S \implies$ D ha gli autovalori sulla diagonale, ripetuti tante volte quanto è la loro molteplicità. La matrice S è la matrice formata da autovettori di T.

<u>Esempio</u> <u>DI UTILIZZO</u> <u>DELLA</u> <u>DIAGONALIZZAZIONE</u>

Data $A \in M_{m \times m}$ cerchiamo una sua potenza, ad esempio A^m. Se A è diagonalizzabile allora si può procedere in questo modo:

So che $\exists$ D, S: $D = S^{-1} \cdot A \cdot S$ (per definizione di matrice diagonalizzabile)

$\implies D = S^{-1} \cdot A \cdot S \implies A = S \cdot D \cdot S^{-1}$

$$\implies A^m = (S \cdot D \cdot S^{-1})^m = \underbrace{S D \overbrace{S^{-1} \cdot S}^{=I} D \overbrace{S^{-1} S}^{I} \ldots S \cdot D \cdot S^{-1}}_{m \text{ volte}} = S D^m S^{-1}$$

questo è vantaggioso perché D è diagonale e quindi l'm-esima potenza di D è uguale ALLA MATRICE DIAGONALE CON l'm-esima potenza degli elementi a_{jj} SULLA diagonale: CIOÈ

$$\text{se } D = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{mm} \end{pmatrix} \implies D^k = \begin{pmatrix} a_{11}^k & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{22}^k & \vdots \\ \vdots & & \ddots \\ & & a_{mm}^k \end{pmatrix} \quad \forall k$$