In uno spazio euclideo V dato $U < V$ si può determinare $U^\perp$

Tale che $U \oplus U^\perp = V \Rightarrow \forall v \in V \ \exists \ g$ ed $h \mid v = g + h$ con $g \in U$ e $h \in U^\perp$

Esempio $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ e $U = \langle\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle\rangle$ Cerco $g = a_1 u_1 + a_2 u_2$

In generale: $\dim U = k$, $\dim V = n$. cerco $g \in U \mid v = g + h$ $v \in V$.

$V = \langle\langle v_1 \dots v_n \rangle\rangle$ $\quad F((v, v_1)) = 0 \Rightarrow F((\sum_{i=1}^{n} b_i v_i , v_j))$

$U = \langle\langle u_1 \dots u_k \rangle\rangle$ $\quad g = \sum^{k} b_j u_j$

ma $h = v - g$ e $h \in U^\perp \Rightarrow$ sostituisco h con $v - \sum^{k} b_j u_j$ e siccome $h \in U^\perp$ $\Rightarrow$ il prodotto scalare tra h e un vettore di U sarà $= 0$.

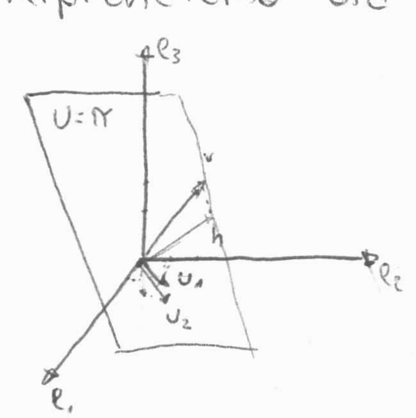
$$\begin{cases} (v - \sum b_j u_j) \cdot u_1 = 0 \\ \vdots \\ (v - \sum b_j u_j) \cdot u_k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v \cdot u_1 - b_1 u_1 \cdot u_1 - \dots - b_k u_k \cdot u_1 = 0 \\ \vdots \\ v \cdot u_k - b_1 u_1 \cdot u_k - \dots - b_k u_k \cdot u_k = 0 \end{cases}$$

Ho k incognite: $(b_1 \dots b_k)$. Avrò una soluzione se la matrice associata al sistema avrà rango massimo: $rg\, A = k$

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & u_1 \cdot u_2 & \dots & u_1 \cdot u_k \\ \vdots & & & \\ u_k \cdot u_1 & \dots & \dots & u_k \cdot u_k \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Abbiamo già dimostrato che il rango è un invariante per congruenza. Abbiamo anche dimostrato di poter trovare la matrice diagonale CONGRUENTE AD A, che, nel nostro caso, sarà QUELLA DI UNA FORMA QUADRATICA DEFINITA POSITIVA, QUINDI. Otterrò COME matrice diagonale l'identità con rango max $= k$. Abbiamo quindi trovato la soluzione: un vettore $g = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$

Riprendiamo ora il nostro esempio



$\pi: x - y - z = 0$

svolgiamo i prod. scalari.

$$\begin{cases} v \cdot u_1 = a\, u_1 \cdot u_1 + b\, u_2 \cdot u_1 \\ v \cdot u_2 = a\, u_2 \cdot u_1 + b\, u_2 u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 3 \\ a + 2b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = -\frac{5}{3} \end{cases} \qquad g = \frac{7}{3} u_1 - \frac{5}{3} u_2 = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 2/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

$$h = v - g = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

Riprendiamo il sistema generale

$$\begin{cases} v \cdot u_1 = a_1 \cdot u_1 u_1 + \dots + a_k u_k \cdot u_1 \\ \vdots \\ v \cdot u_k = a_1 u_1 \cdot u_k + \dots + a_k u_k \cdot u_k \end{cases}$$

e se $\mathcal{B}$ è ortogonale:

$$\begin{cases} v \cdot u_1 = a_1 u_1 \cdot u_1 \\ \vdots \\ v \cdot u_k = a_k u_k \cdot u_k \end{cases} \Rightarrow a_j = \frac{v \cdot u_j}{u_j \cdot u_j} = \frac{v \cdot u_j}{\|u_j\|^2}$$

Questi sono detti coefficienti di $\boxed{\text{Fourier}}$ ma possono essere usati SOLO se la base è ORTOGONALE.

FACCIAMO QUESTA RIFLESSIONE:

$\exists$ matrici S (ortogonali) tali che $S^{-1} = S^T$

Se A è pensata come matrice di una forma quadratica $\Rightarrow$ B ad essa congruente è tale che data S MATRICE di cambiamento di base $B = S^T A S$.

Se A è pensata come matrice di un operatore (simmetrico) in una base $\Rightarrow$ B ad essa simile è tale che data S matrice di cambiamento di base ho $B = S^{-1} A S$. $\Rightarrow$ se S è ortogonale A e B sono congruenti e simili allo stesso tempo. ED È PER QUESTO CHE POSSIAMO USARE GLI AUTOVALORI (E GLI AUTOVETTORI) PER TROVARE B, DATA A.

Teorema di ortogonalizzazione (di Gram-SCHIMT)

In uno spazio euclideo V siano dati $v_1 \dots v_p$ vettori indip e consideriamo i sottospazi $L_j = \langle\langle v_1 \dots v_j \rangle\rangle$ quindi $L_1 \subset L_2 \subset L_3 \subset \dots \subset L_p$

$\Rightarrow \exists$ p vettori $w_1 \dots w_p \in V$ ortogonali tali che $L'_j = \langle\langle w_1 \dots w_j \rangle\rangle = L_j$

Tali vettori non sono unici, ma i sottospazi generati sì.

Dimostrazione: per induzione sul numero p di vettori.

1) $p = 1$ ho $w_1 = v_1 \Rightarrow$ stesso sottospazio.

2) Supponiamo dimostrata la proposizione per K vettori, e la dimostriamo per K+1. Considero v_{k+1}: lo proietto ortogonalmente sul sottospazio $L'_K = L_K \Rightarrow$ lo scriverò:

$\underbrace{\sum_{j=1}^{k} a_j w_j}_{\in L'_k = L_k} + h = v_{k+1}$ con h vettore ortogonale ad ogni w_j

Allora prendo $h = w_{k+1}$ $\Rightarrow$ Devo far vedere che $L_{k+1} = L'_{k+1}$

So che $L'_k = L_k$ e v_{k+1} è combinazione dei w_j con $j = 1 \dots k+1$, quindi $L_{k+1} \subseteq L'_{k+1}$. Inoltre, poiché $h = w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} a_j w_j \in L_{k+1}$ ho che $L'_{k+1} \subseteq L_{k+1}$ $\Rightarrow$ Ho quindi che $L_{k+1} = L'_{k+1}$ ✓

c.v.d.

N.B.: I vettori che utilizzo sono unici a meno di multipli. Infatti i sottospazi generati saranno uguali indipendentemente da k_i che moltiplico per i vettori.

OSSERVAZIONE: "ORTOGONALIZZARE" UNA BASE DI $\mathbb{R}^n$ SIGNIFICA, A PARTIRE DA UNA BASE DATA, COSTRUIRE UNA BASE ORTOGONALE CON LA PROPRIETÀ CHE I SOTTOSPAZI GENERATI DAI PRIMI k VETTORI DI UNA BASE ED I SOTTOSPAZI GENERATI DAI PRIMI k VETTORI DELL'ALTRA, COINCIDONO $\forall k = 1, \dots, n$