Sia A una matrice simmetrica in uno spazio euclideo n-dimensionale, | 14/05/2014

possiamo vedere A come la matrice $[T]_{B_{\perp n}}$ ASSOCIATA A $T: V \to V$ operatore simmetrico oppure come la matrice associata nella base $B_{\perp n}$ ad una forma quadratica $q: V \to \mathbb{R}$ CHE E' DEFINITA MEDIANTE LA SEGUENTE RELAZIONE:

$$q(v) = T(v) \cdot v \qquad \forall v \in V$$

Infatti se consideriamo $[v]_{B_{\perp n}} = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $[T(v)]_{B_{\perp n}} = AX$, allora:

$$q(X) = (AX)^T \cdot IX = X^T A^T X = X^T A X$$

quindi $[q]_{B_{\perp n}} = A$.

A (MATRICE SIMMETRICA) pensata come matrice associata a $T$, $[T]_{B_{\perp n}} = A$, è diagonalizzabile ortogonalmente, cioè esiste una matrice $S$ ortogonale e $D$ diagonale, tale che $D = S^{-1}AS = S^TAS$.

Voglio dimostrare che $D$ è la matrice che permette di scrivere $q(X)$ in forma canonica, cioè quella in cui compaiono SOLO i quadrati DELLE VARIABILI:

$$q(X) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$$

Infatti:

$$\begin{array}{ccc} \overset{X}{(V,e)} & \xrightarrow[A]{T} & (V,e) \\ S \uparrow id & & id \downarrow S^{-1} \\ \underset{Y}{(V,B_{\perp n})} & \xrightarrow[D]{T} & (V,B_{\perp n}) \end{array}$$

Considero $[v]_e = X$ e $[v]_{B_{\perp n}} = Y$, quindi $X = SY$,

$A = [T]_e$, $q(X) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \dots$ e

$$q(X) = X^T A X = (SY)^T A SY = Y^T \overset{D}{S^TAS}\, Y = Y^T D Y, \text{ quindi } q(Y) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2$$

con $\lambda_j$ autovalori di $T$.

ESERCIZIO

$$q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

in $\mathbb{R}^2$ mettiamo la base canonica

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ diagonalizzo A ortogonalmente $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$

$\Rightarrow$ In una base nuova, formata dagli autovettori, la nostra $q(Y)$ sarà: $\boxed{q(Y) = 2y_2^2}$

cerco autovettori: $E_0 = x_1 + x_2 = 0$ generato da: $\langle\langle (1,-1)^T \rangle\rangle \Rightarrow v_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^T$

$E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow E_2 = \langle\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle\rangle \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow B_{\perp n} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ e $D = S^T A S$.

DEFINIZIONE

Si definisce QUADRICA il luogo degli zeri di un polinomio di secondo grado nelle variabili date dalle coordinate dello spazio ambiente $\mathbb{R}^n$, spazio euclideo.

$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \dots + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \dots + a_{nn}x_n^2 + b_1x_1 + \dots + b_kx_k + c = 0$$

oppure $\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j}_{\text{PARTE QUADRATICA}} + \underbrace{\sum b_k x_k}_{\text{PARTE lineare}} + \underbrace{c}_{\text{termine noto}} = 0$; MATRICIALMENTE $X^TAX + B^TX + C = 0$.

* le quadriche sono le coniche (curve in un piano date da un polinomio di 2° grado)

ESEMPIO in $\mathbb{R}^2$ — conica

$$x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1 - 5x_2 + 1 = 0$$

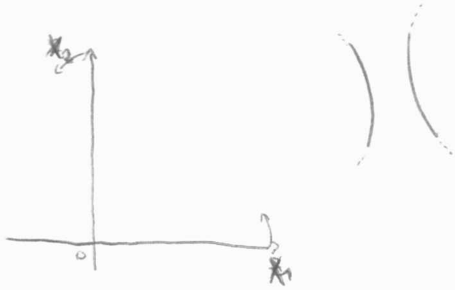
$y_1^2 - y_2^2 + 2y_1 + 3 = 0$; POSTO $y_1^2 + 2y_1 = (y_1+1)^2 - 1$

$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = y_1 + 1 \\ z_2 = y_2 \end{cases}$ , OTTENIAMO: $z_1^2 - z_2^2 + 2 = 0 \Rightarrow z_1^2 - z_2^2 = -2 \Rightarrow$

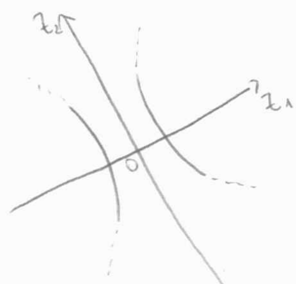
MEDIANTE IL CAMBIAMENTO DI COORDINATE

$\Rightarrow -\frac{z_1^2}{2} + \frac{z_2^2}{2} = 1$

Quindi la curva iniziale è un'iperbole.



Ruoto e traslo gli assi di riferimento, quindi ho:



Ora che sappiamo trovare la forma canonica, dobbiamo classificarla.

1) SUPPONIAMO $rg\, A = n$, DOVE $A$ È LA MATRICE DELLA PARTE QUADRATICA $\Rightarrow$ NELLE COORDINATE FINALI $z_1, \dots, z_n$ SI AVRÀ L'EQUAZIONE:

$\Rightarrow \underbrace{a_1 z_1^2 + a_2 z_2^2 + \dots + a_n z_n^2 = c}_{} \Rightarrow \frac{a_1}{c} z_1^2 + \frac{a_2}{c} z_2^2 + \dots + \frac{a_n}{c} z_n^2 = 1$ (SE $c \neq 0$)

$\Rightarrow \pm \frac{z_1^2}{\frac{c}{a_1}} \pm \frac{z_2^2}{\frac{c}{a_2}} \pm \dots \pm \frac{z_n^2}{\frac{c}{a_n}} = 1$ ← FORMA CANONICA della QUADRICA A CENTRO (SUPPOSTI I DENOMINATORI POSITIVI)

Il più o meno dipende dall'indice di inerzia.
Il tipo di quadrica a centro dipende dall'indice di inerzia della forma quadratica; abbiamo n tipi di quadriche a centro in $\mathbb{R}^n$.
In $\mathbb{R}^2$ ci sono due tipi diversi:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ → ellisse

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ → iperbole

In $\mathbb{R}^3$ le superfici quadriche a centro sono 3:

Disegnare: $\underbrace{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}_{\text{elissoide}}$ , $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ , $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ : STUDIARLE.