In uno spazio euclideo V n-dimensionale, consideriamo k vettori $v_1, \dots, v_k$

Definisco la matrice
$$A = \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & \cdots & v_1 \cdot v_k \\ \vdots & & \vdots \\ v_k \cdot v_1 & \cdots & v_k \cdot v_k \end{pmatrix}$$
detta matrice di <u>GRAM</u>

dei vettori $v_1, \dots, v_k$, il determinante è detto <u>GRAMIANO</u> dei vettori $v_1, \dots, v_k$ $= G(v_1, \dots, v_k)$

I K vettori sono L.I. $\iff G(v_1, \dots, v_k) \neq 0$ poiché se i k vettori sono L.I. sono base di un sottospazio di $\dim K \Rightarrow$, la matrice ~~diventa~~ ~~quindi~~ è in questo caso la matrice associata al prodotto scalare ristretto al sottospazio; per Silvester esiste quindi una $B_K \mid A \underset{c}{\approx} I$, MATRICE DEL PRODOTTO SCALARE NELLA BASE B_K, E QUINDI ESSENDO IL RANGO INVARIANTE PER CONGRUENZA, ANCHE $\operatorname{rg} A = k$.
Di conseguenza se i vettori son L.D. $\iff G(v_1, \dots v_k) = 0$

Se i vettori sono ortogonali $\Rightarrow G(v_1, \dots, v_k) = \|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2 \cdots \|v_k\|^2$

Se i vettori non sono ortogonali, possiamo ortogonalizzarli con G-S determinando i $w_1, \dots, w_k$ vettori $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{DELLA PROPOSIZIONE}} G(v_1, \dots, v_k) = \|w_1\|^2 \cdots \|w_k\|^2$. INFATTI:

Facciamo vedere tale risultato per due vettori (nel caso di uno, è vero banalmente)
Considero $v_1, v_2 \in V$, l'ortogonalizzazione ci fornisce $w_1, w_2 \mid w_1 = v_1 \wedge w_2 = v_2 - \alpha w_1$ $\quad \alpha \neq 0$

considero
$$\begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & w_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot w_1 & v_2 \cdot v_2 \end{pmatrix} \overset{R_1 = \alpha R_1}{\sim} \begin{pmatrix} \alpha w_1 \cdot w_1 & \alpha w_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot w_1 & v_2 \cdot v_2 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_2 = R_2 - R_1 \\ R_1 = R_1/\alpha}}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & w_1 \cdot v_2 \\ v_2 w_1 - \alpha w_1 \cdot w_1 & v_2 \cdot v_2 - \alpha w_1 \cdot v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & w_1 \cdot v_2 \\ (v_2 - \alpha w_1) \cdot w_1 & (v_2 - \alpha w_1) \cdot v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & w_1 \cdot v_2 \\ w_2 \cdot w_1 & w_2 \cdot v_2 \end{pmatrix}$$

Applico le STESSE operazioni riga eseguite, sulle colonne corrispondenti

$C_2 = C_2 - \alpha C_1$ $\quad \begin{pmatrix} w_1\cdot w_1 & w_1\cdot v_2 - \alpha w_1\cdot w_1 \\ w_1 w_2 & w_2\cdot v_2 - \alpha w_1 w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1\cdot w_1 & w_1\cdot(\overset{w_2}{\overbrace{v_2-\alpha w_1}}) \\ \underset{0}{w_1\cdot w_2} & \underset{w_2}{(v_2-\alpha w_1)}\cdot w_2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} w_1\cdot w_1 & 0 \\ 0 & w_2\cdot w_2 \end{pmatrix} \Rightarrow G(v_1, v_2) = \|w_1\|^2\|w_2\|^2$

Il procedimento è lo stesso con "K" vettori. QUINDI:

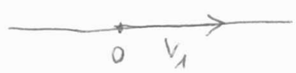
$G(v_1,\dots,v_k) = \|w_1\|^2\|w_2\|^2\cdots\|w_k\|^2 \leq \|v_1\|^2\|v_2\|^2\cdots\|v_k\|^2$

(l'uguaglianza esiste quando $v_1,\dots,v_k$ sono ortogonali)

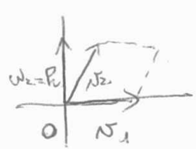
Siano $v_1,\dots,v_k$ vettori L.I. in $\mathbb{R}^n$ euclideo $\Rightarrow$ posso "determinare" il parallelepipedo di lati $v_1,\dots,v_k$ e il suo volume:

$Vol(P_{v_1,\dots,v_k}) = \sqrt{G(v_1,\dots,v_k)}$

DIM: per induzione

$k=1$: dato v_1 

$\Rightarrow Vol(P_{v_1}) = \|v_1\| = \sqrt{v_1\cdot v_1} = \sqrt{G(v_1)} = \sqrt{v_1\cdot v_1}$

$k=2$: dati v_1, v_2 

$\Rightarrow Vol(P_{v_1,v_2}) = \|v_1\|\cdot\|h\| = \|w_1\|\|w_2\| = \sqrt{(v_1\cdot v_1)(w_2\cdot w_2)} =$

$= \sqrt{(w_1\cdot w_1)(w_2\cdot w_2)} = \sqrt{G(v_1,v_2)}$

Supponiamo che sia vero per k vettori e dimostriamolo per k+1 vettori

$Vol(P_{v_1,\dots,v_{k+1}}) = Vol(P_{v_1,\dots,v_{k+1}})\cdot\|h\| = \sqrt{G(v_1,\dots,v_k)}\cdot\|h\| = \sqrt{\|w_1\|^2\cdots\|w_k\|^2}\sqrt{\|h\|^2} = \sqrt{G(v_1,\dots,v_{k+1})}$

$h := w_{k+1}$ proiezione di v_{k+1} su un sottospazio perpendicolare a quello generato dai k vettori $v_1,\dots,v_k$

ESEMPIO 1)

Dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ calcolare l'area del parallelogramma avente per lati i vettori dati: Area $= \sqrt{G(v_1, v_2)}$

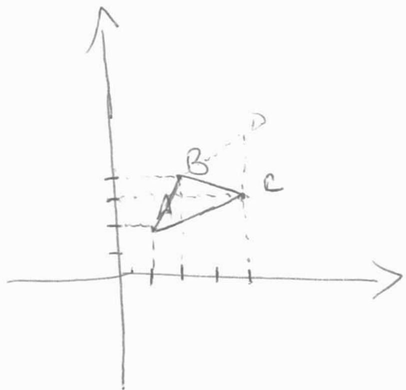
Costruisco la matrice di GRAM

$$\begin{pmatrix} V_1 \cdot V_1 & V_1 \cdot V_2 \\ V_2 \cdot V_1 & V_2 \cdot V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow G(v_1, v_2) = 27 \Rightarrow \text{AREA} = \sqrt{27}$$

$\lrcorner$

ESEMPIO 2)

Calcolare l'area del triangolo $\widehat{ABC}$ con $A = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$, ~~$C = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$~~ $C = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$



Cerco i vetto che costituiscono le dimensioni di ABCD

$v_1 = v_C - v_A = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

$v_2 = V_B - V_A \quad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$$G(v_1, v_2) = \det \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = 25 \Rightarrow \text{Area}\,\widehat{ABC} = \frac{\sqrt{25}}{2} = \frac{5}{2}$$

$\lrcorner$

In $\mathbb{R}^n$ euclideo con una base ORTONORMALE ad esempio $\mathcal{E}\{e_1, \dots, e_n\}$, siano dati n vettori, $v_1, \dots, v_n \Rightarrow v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \quad \forall j = 1, \dots, n$

SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL DETERMINANTE DI UNA MATRICE:

Considero la matrice di GRAM di vettori $v_j, j = 1, \dots, n$

$$v_j \cdot v_k = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i\right) = a_{1j} a_{1k} + a_{2j} a_{2k} + \dots + a_{nj} a_{nk}$$

PER BILINEARITÀ

considero

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se considero $A^T A$ ottengo una matrice che ha per entrate $v_j \cdot v_k$

$*$

Cioè la matrice di GRAM $\Rightarrow \det(A^T \cdot A) = G(v_1, \dots, v_n)$

$\det(A^T \cdot A) = |A|^2 \Rightarrow |A| = \sqrt{G(v_1, \dots, v_n)} = Vol(P_{v_1, \dots, v_n})$

*

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ il prodotto della j riga di A^T per la k colonna di A da $v_j \cdot v_k$

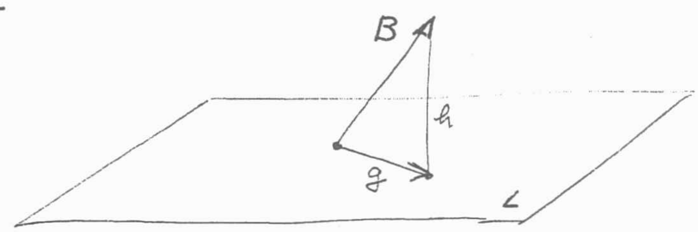
Consideriamo un sistema lineare non risolubile

Sia $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = 1, \dots, n$

Vogliamo trovare un vettore che meglio approssima la soluzione. Se $B = (b_1, \dots, b_n) \Rightarrow B$ non sta nel sottospazio generato dalle colonne $A_1, \dots, A_m$
$\Rightarrow$ vogliamo trovare un vettore $g \in L(A_1, \dots, A_m)$ tale sia minima la differenza tra B e g cioè $\|B-g\|$ sia minima tra $\|B-g_k\|$ con $g_k \in L(\ )$.

$$\|B-g\| = \min_{g_k \in L} \|B-g_k\| = \delta$$

Questo vettore g è la proiezione ortogonale di B su L



δ è la norma della componente di B $\perp$ a L

$\Rightarrow$ troviamo $g = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_m A_m$ con

$B = g + h = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_m A_m + h$

$$\begin{cases} \langle B, A_1 \rangle = \alpha_1 \langle A_1, A_1 \rangle + \dots + \alpha_m \langle A_m, A_1 \rangle + \underbrace{\langle h, A_1 \rangle}_{=0} \\ \vdots \\ \langle B, A_m \rangle = \alpha_1 \langle A_1, A_m \rangle + \dots + \alpha_m \langle A_m, A_m \rangle + \overbrace{\langle h, A_m \rangle}^{0} \end{cases}$$

è un sistema lineare in α_j con m equazioni in m incognite, non omogeneo.

La matrice $A = G(A_1, \dots A_m)$ ha $\det A \neq 0$

$\Rightarrow$ il sistema è risolubile e si ha

$$\alpha_k = \frac{\begin{vmatrix} \langle A_1, A_1 \rangle & \dots & \langle A_1, B \rangle \dots \\ & & \end{vmatrix}}{|G(A_1, \dots, A_m)|}$$

$\Rightarrow h = B - g = B - \alpha_1 A_1 - \alpha_2 A_2 - \dots - \alpha_m A_m$

cerco $\|h\| = \delta$

Consideriamo il volume del parallelepipedo

$V_m^2 = V_{m-1}^2 \cdot \|h\|^2 \Rightarrow |G(B, A_1 \dots A_m)| =$

$= |G(A_1, \dots A_m)| \cdot \|h\|^2 \Rightarrow$

$$\|h\|^2 = \frac{|G(B, A_1, \dots, A_m)|}{|G(A_1, \dots, A_m)|}$$